

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АЕРОКОСМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. М.Є.ЖУКОВСЬКОГО
«ХАРКІВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Скіцка Марія Вікторівна

(прізвище, ім'я, по батькові)

УДК 539.3

(індекс)

ДИСЕРТАЦІЯ

Деякі задачі теорії термопружності для багатозв'язних тіл

(назва дисертації)

113 Прикладна математика

(шифр і назва спеціальності)

11 Математика і статистика

(галузь знань)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 М.В. Скіцка

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник Ніколаєв Олексій Георгійович, доктор фізико-математичних наук, професор

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

Харків -2025

АНОТАЦІЯ

Скіцка Марія Вікторівна. Деякі задачі теорії термопружності для багатозв'язних тіл. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика і статистика за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, 2025.

Дисертаційна робота спрямована на подальший розвиток апарату узагальненого методу Фур'є на нові класи вісесиметричних задач стаціонарної термопружності для просторових багатозв'язних тіл зі сферичними порожнинами та включеннями, дослідження ефективності методу і меж його практичної реалізації, застосування його до локального моделювання термопружних полів у тілах зі сферичними порожнинами і включеннями, дослідження і аналіз цих полів, оптимальне керування вісесиметричним стаціонарним температурним полем термопружного стану простору зі сферичними включенням і порожниною. В роботі увага приділяється також задачам із внутрішніми розподіленими джерелами тепла, які суттєво ускладнюють побудову точних математичних моделей і вимагають застосування новітніх підходів до їхнього аналізу.

Об'єктом дослідження є напружено-деформований стан багатозв'язного просторового тіла зі сферичними порожнинами та неоднорідностями за наявності в ньому стаціонарних температурних полів або в умовах їх відсутності.

Предметом дослідження є методи та моделі дослідження напружено-деформаційних і стаціонарних термопружних полів в багатозв'язних просторових тілах певної форми і оптимального керування ними.

Актуальність роботи зумовлена стрімким розвитком технологій, пов'язаних з використанням композитних і пористих матеріалів у машинобудуванні, авіаційній промисловості, енергетиці, мікроелектроніці та біомедичних пристроях. Ці матеріали демонструють складну поведінку під дією зовнішніх термонавантажень і внутрішніх джерел тепла. Наявність включень і пор у матеріалі спричиняє

локальні концентрації напружень, які визначають довговічність і надійність технічних конструкцій. Більшість існуючих чисельних методів не завжди забезпечують достатню точність, особливо в задачах з областями з великою концентрацією напружень, або з достатньою кількістю неоднорідностей.

У дисертаційній роботі побудовано нові вісесиметричні базисні розв'язки рівнянь Ламе та Дюамеля–Неймана для просторових областей, обмежених сферичними поверхнями. Ці розв'язки є фундаментальними для опису термопружного стану тіл з осьовою симетрією та враховують як механічні, так і температурні впливи. Особливої уваги заслуговують нові теореми додавання для побудованих розв'язків у сферичних системах координат, початки яких доволіно зсунуті вздовж осі симетрії. Отримання таких теорем дозволяє ефективно здійснювати математичні перетворення при розв'язанні задач з кількома неоднорідностями, розміщеними в різних точках тіла.

Одним із ключових наукових результатів є точне аналітичне розв'язання другої основної вісесиметричної крайової задачі теорії пружності для кулі з концентричним включенням. У роботі проведено повне математичне обґрунтування існування та єдиності такого розв'язку, що стало важливим внеском у розвиток класичної теорії пружності для тіл зі складною внутрішньою структурою.

У роботі побудовано локальні параметричні моделі термопружного стану тіл із двома сферичними порожнинами або включеннями. Моделі охоплюють як випадки з розподіленими джерелами тепла, так і без них. На основі цих моделей досліджено локальну поведінку напружень у зонах концентрації, що особливо актуально для прогнозування руйнувань у пористих і композитних матеріалах.

У межах дослідження виконано параметричний аналіз розподілу напружень залежно від різних характеристик тіла: розмірів включень, відстані між ними, їхніх термомеханічних властивостей і рівня теплового навантаження. Цей аналіз дозволив виявити закономірності взаємного впливу включень на напружено-деформований стан матеріалу.

Окремим напрямом роботи стала вперше поставлена та розв'язана задача про оптимальне керування температурним полем у багатозв'язному тілі – просторі зі сферичними включеннями. Було зведено таку задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) з параметричною залежністю її правих частин від температурного поля і вперше розроблено метод розв'язання таких систем. Це стало суттєвим кроком у розвитку методів оптимального керування в математичній фізиці. Метод дозволяє звести задачу оптимального керування до задачі умовного екстремуму квадратичного функціонала, заданого на певному гільбертовому просторі.

Нарешті, у роботі проведено чисельне комп'ютерне моделювання розв'язаних задач із використанням методу редукції. Досліджено збіжність цього методу, що підтвердило його високу ефективність і практичну придатність для обчислювального аналізу складних термомеханічних систем.

Достовірність результатів дисертації базується на строгому обґрунтуванні розв'язків усіх розглянутих у роботі задач, порівнянні результатів з відомими для однозв'язних тіл, широкому комп'ютерному експерименті, перевірці практичної збіжності метода редукції в усіх задачах.

Ключові слова: моделювання, математична модель, комп'ютерна модель, локальна модель пористого матеріалу, термопружний стан, узагальнений метод Фур'є, базисні розв'язки, теореми додавання, розв'язувальна система, трифазна термопружна система, криволінійні координати, сферичні включення, джерела тепла, задача спряження, умови ідеального теплового контакту, оптимальне керування термопружним станом, багатозв'язне кусково-однорідне тіло, фредгольмів оператор, метод редукції, параметричний метод розв'язання нескінченної системи, квадратичний функціонал якості, некоректна задача, спектральний метод, ефективність методу, коефіцієнт лінійного температурного розширення, розподіл напружень, метод скінченних елементів, аналітичний розв'язок, поле напружень і деформацій, температурне поле.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Nikolaev O., Skitska M. The method of determining optimal control of the thermoelastic state of piece-homogeneous body using a stationary temperature field // Radioelectronic and Computer Systems. – 2024, no. 2(110). Pp. 98-119. DOI: 10.32620/reks.2024.2.09 (Scopus, Q3).
2. Ніколаєв О. Г., Скіцка М.В. Локальна модель термопружного стану пористого матеріалу // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023, № 1. – С. 92-100. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.24
3. Nikolaev O. G., Skitska M. V. Thermoelastic problem for a space with two inclusions and heat generation // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures. - 2024, no. 38. Pp. 248-268. DOI: 10.15421/4224119
4. Nikolaev O. G., Skitska M. V. Thermoelastic problem for a space with two inclusions and heat generation // International conference «Mathematic problems of the technical mechanics. Annual scientific conference MPTM 2024», September 17-19, 2024, Dnipro, Ukraine, Book of Abstracts. Part 2, 144 p.
5. Ніколаєв О., Скіцка М. Метод визначення оптимального керування термопружним станом кусково-однорідного тіла за допомогою стаціонарного температурного поля // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового // Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2024. – Вип. 6. Р. 185.

ABSTRACT

Skitska Mariia Viktorivna. Some Problems of Thermoelasticity Theory for Multiply Connected Bodies. – Qualification research paper (manuscript).

Dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the field of knowledge 11 – Mathematics and Statistics, specialty 113 Applied Mathematics. – National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, 2025.

The dissertation is focused on the further development of the apparatus of the generalized Fourier method for new classes of axisymmetric steady-state thermoelasticity problems in multiply connected spatial bodies with spherical cavities and inclusions. It explores the efficiency and limitations of this method, applies it to local modeling of thermoelastic fields in such structures, and analyzes the behavior of these fields. Special attention is given to problems involving distributed internal heat sources, which significantly complicate the formulation of precise mathematical models and require the use of modern analytical techniques.

The object of the study is the stress–strain state of a multiply connected three-dimensional body with spherical cavities and inhomogeneities in the presence or absence of stationary temperature fields.

The subject of the study is the development of methods and models for analyzing thermoelastic and stress–strain fields in multiply connected spatial bodies of a specific shape, as well as for optimal control of these fields.

The relevance of the study is driven by the rapid development of technologies based on the use of composite and porous materials in mechanical engineering, the aerospace industry, energy systems, microelectronics, and biomedical devices. These materials exhibit complex behavior under external thermal loads and internal heat sources. The presence of inclusions and pores in the material leads to local stress concentrations, which directly affect the durability and reliability of technical structures. Most existing numerical methods do not always provide sufficient accuracy, particularly in problems involving high stress concentration zones or a large number of inhomogeneities.

The dissertation presents newly constructed axisymmetric basis solutions to the Lamé and Duhamel–Neumann equations for spatial domains bounded by spherical surfaces. These solutions are fundamental for describing the thermoelastic state of axisymmetric bodies, accounting for both mechanical and thermal effects. Particular attention is paid to the newly derived addition theorems for these solutions in spherical coordinate systems with arbitrarily shifted origins along the symmetry axis. These theorems enable efficient mathematical transformations when solving problems involving multiple inhomogeneities located at different points within the body.

One of the key scientific contributions of the work is the exact analytical solution to the second fundamental axisymmetric boundary value problem of elasticity theory for a sphere with a concentric inclusion. The dissertation provides a rigorous mathematical justification for the existence and uniqueness of the solution, representing a significant advancement in classical elasticity theory for bodies with complex internal structures.

The work also proposes local parametric models of the thermoelastic state of bodies containing two spherical cavities or inclusions. These models cover both cases—with and without distributed heat sources. Based on these models, the local stress behavior in zones of concentration is analyzed, which is particularly relevant for predicting failure in porous and composite materials.

A parametric analysis of the stress distribution is carried out depending on various body characteristics, such as inclusion sizes, spacing, thermomechanical properties, and the level of thermal loading. This analysis reveals regularities in the mutual influence of inclusions on the stress–strain state of the material.

A separate and original direction of the research is the formulation and solution of an optimal control problem for the temperature field in a multiply connected domain with spherical inclusions. This problem was reduced to an infinite system of linear algebraic equations (ISLAE) with parametric dependence of the right-hand side on the temperature field. For the first time, a method for solving such systems was developed. This approach represents an important contribution to the development of optimal control methods in mathematical physics. The proposed method transforms the optimal control problem into a conditional extremum problem for a quadratic functional defined in a Hilbert space.

Finally, numerical computer simulations were conducted for the solved problems using the reduction method. The convergence of this method was studied, confirming its high efficiency and practical suitability for the computational analysis of complex thermomechanical systems.

The reliability of the dissertation's results is ensured by the rigorous justification of all solutions presented, comparison with known solutions for simply connected bodies, extensive computer experiments, and convergence validation of the reduction method across all studied problems.

Keywords: modeling, mathematical model, computer model, local model of porous material, thermoelastic state, generalized Fourier method, basis solutions, addition theorems, solution system, three-phase thermoelastic system, curvilinear coordinates, spherical inclusions, heat sources, conjugation problem, ideal thermal contact conditions, optimal control of thermoelastic state, multiply connected piecewise homogeneous body, Fredholm operator, reduction method, parametric solution of infinite systems, quadratic quality functional, ill-posed problem, spectral method, method efficiency, coefficient of linear thermal expansion, stress distribution, finite element method, analytical solution, stress and strain field, temperature field.

ЗМІСТ

Анотація.....	2
Abstract.....	6
Вступ	11
Розділ 1. Аналіз методів розв’язання задач теорії пружності та термопружності для багатозв’язних тіл	20
Висновки до розділу 1	66
Розділ 2. Розвиток апарату узагальненого методу Фур’є.....	50
2.1 Інваріантний вісесиметричний базис для рівняння Ламе.....	50
2.2 Частинні розв'язки рівняння Дюамеля – Неймана	55
2.3 Напруження на поверхні сфери, які відповідають введеним переміщенням	56
2.4 Теореми додавання для базисних розв'язків рівняння Ламе.....	61
2.5 Висновки до розділу 2	66
Розділ 3. Локальна модель стаціонарного термопружного стану в пористому матеріалі в області між двома сферичними порами	67
3.1 Постановка задачі	67
3.2 Побудова загального розв’язку задачі та її зведення до розв’язувальної системи	68
3.3 Чисельний експеримент	72
3.4 Висновки до розділу 3	77
Розділ 4. Основна вісесиметрична крайова задача теорії пружності для кулі зі сферичною неоднорідністю	79

	10
4.1 Постановка задачі	79
4.2 Розв'язання пружної задачі	80
4.3 Комп'ютерний експеримент	93
4.4 Висновки до розділу 4	97
Розділ 5. Задача термопружності для простору з двома включеннями і тепловиділенням	99
5.1 Постановка задачі	99
5.2 Розв'язання температурної задачі.....	100
5.3 Розв'язання термопружної задачі	102
5.4 Чисельні результати та їх аналіз	107
5.5 Висновки розділу 5	111
Розділ 6. Метод визначення оптимального керування термопружним станом кусково-однорідного тіла за допомогою стаціонарного температурного поля...	112
6.1 Постановка задачі	112
6.2 Розв'язання задачі (6.2), (6.3), (6.8)	114
6.3 Розв'язання прямої задачі (6.1), (6.4), (6.5)	116
6.4 Аналіз системи (6.37), (6.38)	121
6.5 Зведення задачі оптимального керування до еквівалентної задачі	125
6.6 Метод розв'язання еквівалентної задачі	126
6.7 Комп'ютерний експеримент	133
6.8 Висновки розділу 6	137
Висновки	140
Список літератури	143

ВСТУП

Актуальність теми дослідження.

Вже сьогодні можна сказати, що нові види матеріалів, серед яких, в першу чергу, слід виділити композитні та пористі матеріали, зробили революцію в галузях промисловості по всьому світу, пропонуючи безпрецедентні можливості для інновацій, ефективності та стійкості. За прогнозами спеціалістів світовий ринок тільки композитних матеріалів досягне 164 мільярдів доларів США в 2031 р., зростаючи кожного року в середньому на 7,2%. Мікроелектроніка, будівництво, машино- і авіабудування, відновлювальна енергетика, хімічна промисловість, ракетно-космічна техніка, біологія, медицина – це далеко не повний перелік областей, де використовуються різні вироби з пористих і композитних матеріалів, які в залежності від складових компонентів, мікроструктури, розмірів і форми пор і включень, технології виробництва мають різні фізико-механічні властивості. Так, наприклад, пористі матеріали, такі, як: металеві піни мають високу міцність та термічну стійкість, алюмосилікати – низьку міцність, але високу хімічну стійкість, різні типи пінобетонів – середню міцність та низьку теплопровідність, тощо. Серед багатьох причин, що зумовлюють використання композиційних матеріалів, можна назвати лише найбільш значущі: мала питома вага, висока питома жорсткість і міцність; висока стійкість композиційних матеріалів з полімерною або керамічною матрицею до корозії; низька теплопровідність (значно нижче, ніж у сталі); стійкість композиційних матеріалів з керамічною матрицею до високої температури, тощо.

Таким чином, при проектуванні виробів з пористих або композиційних матеріалів важливо враховувати умови їх подальшої експлуатації, зокрема, наявність температурних, деформаційних, термopужних полів, які оказують вплив на їх надійність і довговічність. Окремою проблемою є стала потреба в нових видах наноматеріалів зі заздалегідь заданими властивостями, створенню яких має передувати їх математичне моделювання.

Окремо слід сказати про проблеми конструювання механічних об'єктів, які планується експлуатувати в умовах температурних полів. Тут температура може

виступати як керування при мінімізації напружень в зонах їх можливої концентрації, зокрема на міжфазних границях у складених тілах.

Широке коло проблем сучасної техніки пов'язане з природними об'єктами або штучними спорудами, в яких крім термодеоформаційних полів, обумовлених зовнішнім середовищем, є ще й внутрішні джерела теплової енергії, розподілені на деяких поверхнях або в областях в середині тіл. Серед таких об'єктів можна назвати: теплові котли, підлоги у будинках з підігрівом, багат шарові інтегральні плати, підземні сховища, термальні резервуари, елементи тепловиділення в атомній енергетиці, тощо. Розрахункові моделі подібних систем повинні враховувати потужність, форми і області розподілу, зони розташування джерел у тілах, що приводить до додаткових ускладнень при проведенні обчислень. Відомі методи чисельного або аналітико-чисельного дослідження вказаних моделей не завжди забезпечують необхідну повноту і точність результатів обчислень. Отже, розвиток методів розв'язання крайових задач термопружності зі складною геометрією і різними варіантами механічних і теплових ускладнень, створення локальних моделей термопружного стану в тілах з порами і включеннями, дослідження і аналіз термопружних полів за допомогою цих моделей є вельми актуальними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота є частиною досліджень, в яких автор був виконавцем, і які проводилися на кафедрі вищої математики та системного аналізу Національного аерокосмічного університету «Харківський авіаційний інститут» в 2021 – 2023 рр. за темою: «Розвиток та застосування математичних методів дослідження прикладних задач», номер держреєстрації № 0122U201064, і в 2024 р. за темою «Розвиток та застосування конструктивних математичних методів розв'язання прикладних задач» номер держреєстрації № 0124U001351 під керівництвом професора кафедри, доктора фізико-математичних наук, професора, заслуженого працівника освіти України, лауреата Державної премії України в галузі освіти Ніколаєва Олексія Георгійовича.

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є подальший розвиток апарату узагальненого методу Фур'є на нові класи вісесиметричних задач

стаціонарної термопружності для просторових тіл зі сферичними порожнинами та включеннями, дослідження ефективності методу і меж його практичної реалізації, застосування його до локального моделювання термопружних полів у тілах зі сферичними порожнинами і включеннями, дослідження і аналіз цих полів, оптимальне керування вісесиметричним стаціонарним температурним полем термопружного стану простору зі сферичними включенням і порожниною.

Для досягнення цієї мети поставлено такі задачі:

1. Провести аналіз методів розв'язання крайових задач стаціонарної термопружності, їх застосування при моделюванні і дослідженні термопружних полів в багатокомпонентних тілах складної форми, а також методів оптимального керування подібними полями.

2. Розвинути апарат узагальненого методу Фур'є на вісесиметричні стаціонарні термопружні задачі для просторових багатозв'язних тіл, обмежених сферичними поверхнями. Для цього побудувати нові вісесиметричні базисні векторні розв'язки рівнянь Ламе і Дюамеля – Неймана, отримати теореми додавання цих розв'язків в однаково напрямлених сферичних системах координат, початки яких зсунуті один відносно одного довільно вздовж осі симетрії.

3. Застосувати базисні розв'язки рівняння Ламе для побудови точного аналітичного розв'язку другої загальної основної вісесиметричної крайової задачі теорії пружності для кулі з концентричним сферичним включенням. Провести повне обґрунтування розв'язку.

4. Застосувати розвинутий метод до локального моделювання стаціонарних термопружних полів у тілах зі сферичними порожнинами та включеннями. Розглянути обидва випадки: відсутності і наявності розподілених джерел тепла в областях включень.

5. Провести аналіз і обґрунтування цих моделей шляхом дослідження їх коректності.

6. Провести зведення задачі оптимального керування температурним полем термопружного стану простору зі сферичними включенням і порожниною до

еквівалентної задачі, в якій стан об'єкту визначається нескінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

7. Розробити метод дослідження еквівалентної задачі, заснований на параметричному розв'язанні НСЛАР.

8. Дослідити коректність розв'язку еквівалентної задачі.

9. Провести в усіх задачах параметричний аналіз термопружного стану в розглянутих у них тілах.

10. Провести аналіз ефективності УМФ в розглянутих класах задач і меж його практичної реалізації.

11. Зробити висновки за результатами проведених досліджень.

Об'єкт дослідження – напружено-деформований стан багатозв'язного просторового тіла зі сферичними порожнинами та неоднорідностями за наявності в них стаціонарних температурних полів або без них.

Предмет дослідження – методи та моделі дослідження напружено-деформаційних і стаціонарних термопружних полів в багатозв'язних просторових тілах певної форми і оптимального керування ними.

Методи дослідження. Основним методом дослідження розглянутих у дисертації класів задач є узагальнений метод Фур'є, який у роботі отримав подальшого розвитку. При дослідженні другої основної вісесиметричної задачі теорії пружності для кулі зі сферичним включенням застосовувався звичайний метод Фур'є. Для розв'язання еквівалентної задачі при дослідженні оптимального керування температурним полем термопружного стану складеного тіла використовується запропонований у дисертації метод параметричного розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для чисельного розв'язання НСЛАР використовується метод редукції, а в задачі оптимального керування ще й метод Лагранжа і спектральний метод.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в наступному:

1. Набув подальшого розвитку апарат узагальненого методу Фур'є, що полягає у наступному: побудовані нові вісесиметричні векторні базисні розв'язки рівнянь Ламе і Дюамеля – Неймана в сферичних координатах, на основі наборів

гармонічних, бігармонічних і полігармонічних функцій третього порядку. Для цих розв'язків вперше отримано теореми додавання в системах координат, початки яких довільно зсунуті один відносно одного вздовж осі симетрії.

2. Вперше отримано обґрунтований аналітичний розв'язок другої вісесиметричної крайової задачі теорії пружності для кулі з концентричним сферичним включенням в загальній постановці звичайним методом Фур'є. Встановлено клас розв'язності задачі. Для цього вперше отримано оцінку знизу модуля багатопараметричного визначника розв'язувальної системи в задачі спряження деформаційних полів.

3. Вперше отримано локальну аналітико-числову модель термонапруженого стану у пористому матеріалі в області між двома сферичними порами.

4. Вперше поставлено і розв'язано задачу оптимального керування розподіленою системою в багатозв'язній області, а саме, керування температурним полем напруженого стану кусково-однорідного простору зі сферичними включеннями і порожниною. Для цього вперше розв'язано задачу оптимального керування системою, стан якої визначається нескінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

5. Розроблено новий метод параметричного розв'язання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, праві частини яких лінійно залежать від параметрів.

6. Вперше розв'язано задачу про розподіл температурних напружень у кусково-однорідному просторі зі сферичними включеннями при наявності в них розподілених джерел тепла у випадку, коли включення і простір мають різні термомеханічні характеристики.

Практичне значення результатів роботи. Аналітичні розв'язки розглянутих у дисертації задач для простору з двома сферичними порожнинами і з двома включеннями фактично задають локальні параметричні моделі термопружного стану в пористих і зернистих композитних матеріалах (зі сферичними порами і зернами) у тому сенсі, що достатньо точно описують розподіл напружень в них у зонах їх найбільшої концентрації – в областях між неоднорідностями. Локальний характер розподілу напружень в таких тілах

впливає з принципу Сен–Венана і був перевірений в задачах для складених тіл в монографії [73]. Важливість і практичне значення отриманих параметричних моделей на відміну від чисто чисельного комп'ютерного моделювання методом скінченних елементів (МСЕ) продемонстровано в роботі на прикладі розв'язання задачі оптимального керування температурним полем термопружного стану простору зі сферичними порожниною і включенням, де оптимізація фактично проводиться за певними параметрами локальних моделей. Крім того, отримані математичні моделі без суттєвих ускладнень розповсюджуються на тіла з різною (іноді великою) кількістю неоднорідностей і періодичні задачі, де МСЕ мало ефективен. Необхідно зазначити, що отримані математичні моделі є практично точними у тому сенсі, що узагальнений метод Фур'є дозволяє точно задовольнити граничні умови, а чисельне розв'язання розв'язувальних систем можна виконати з будь-яким ступенем точності. При математичному і комп'ютерному моделюванні полів напружень і деформацій це особливо важливо в областях з великою концентрацією напружень, де неточні результати можуть негативно вплинути на конструкторські або технологічні рішення. Важливими практичними результатами роботи також є чисельне моделювання розглянутих термопружних полів, отриманий на основі нього аналіз розподілу напружень в околі порожнин і включень в залежності від геометричних і термомеханічних параметрів, встановлення закономірностей взаємного впливу концентраторів напружень на їх локальний розподіл. Ці результати можуть бути використано при конструюванні різних термомеханічних систем. Крім строгого теоретичного обґрунтування розроблених у дисертації методів в усіх задачах досліджувалися питання чисельної збіжності наближених розв'язків і встановлення меж практичної реалізації методів.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідалися на конференціях:

- XXI Міжнародний симпозіум «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики/ Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics» (МДОЗМФ/DSMMPH-2023), матеріали доповіді в статті:

Ніколаєв О. Г., Скіцка М.В. Локальна модель термопружного стану пористого матеріалу // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023, № 1. – С. 92-100. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.24;

- International conference «Mathematic problems of the technical mechanics. Annual scientific conference MPTM 2024», September 17-19, 2024, Dnipro, Ukraine:

Nikolaev O. G., Skitska M. V. Thermoelastic problem for a space with two inclusions and heat generation // International conference «Mathematic problems of the technical mechanics. Annual scientific conference MPTM 2024», September 17-19, 2024, Dnipro, Ukraine, Book of Abstracts. Part 2, 144 p.

- 11-а Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур». Львів, 2024:

Ніколаєв О., Скіцка М. Метод визначення оптимального керування термопружним станом кусково-однорідного тіла за допомогою стаціонарного температурного поля // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового // Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2024. – Вип. 6. Р. 185.
http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0603.pdf

Публікації. Матеріали дисертації досить повно викладено у 5 наукових працях автора за темою дисертації, у тому числі: 1 стаття у фаховому науковому виданні України (категорія А), індексується в Scopus, EBSCO; DOAJ; Ulrichsweb Global Serials Directory; OCLC WorldCat; Index Copernicus; INSPEC (Institution of Engineering and Technology); CiteFactor; AcademicKeys; Infobase Index; Google Scholar; Scillit; OUCI; 2 статі в фахових наукових виданнях України (категорія Б), індексуються: ICI Journals Master List, Ulrich's Periodicals Directory (NewJersey, USA), Crossref, Google Scholar, Index Copernicus; 2 тези доповідей конференцій.

Структура і об'єм дисертаційної роботи. Дисертація містить вступ, шість розділів, висновки, список використаних джерел. Повний об'єм дисертації 160

сторінок, у тому числі 18 сторінок списку використаних джерел у кількості 166 найменувань.

Список публікацій здобувача

Статті:

1. Nikolaev O., Skitska M. The method of determining optimal control of the thermoelastic state of piece-homogeneous body using a stationary temperature field // Radioelectronic and Computer Systems. – 2024, no. 2(110). Pp. 98-119. DOI: 10.32620/reks.2024.2.09 (Scopus, Q3).
2. Ніколаєв О. Г., Скіцка М.В. Локальна модель термопружного стану пористого матеріалу // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023, № 1. – С. 92-100. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.24
3. Nikolaev O. G., Skitska M. V. Thermoelastic problem for a space with two inclusions and heat generation // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures. - 2024, no. 38. Pp. 248-268. DOI: 10.15421/4224119

Матеріали міжнародних конференцій:

4. Nikolaev O. G., Skitska M. V. Thermoelastic problem for a space with two inclusions and heat generation // International conference «Mathematic problems of the technical mechanics. Annual scientific conference MPTM 2024», September 17-19, 2024, Dnipro, Ukraine, Book of Abstracts. Part 2, 144 p.
5. Ніколаєв О., Скіцка М. Метод визначення оптимального керування термопружним станом кусково-однорідного тіла за допомогою стаціонарного температурного поля // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового // Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2024. – Вип. 6. Р. 185.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ТІЛ

Теорія пружності [1, 2, 3] вивчає механічну поведінку матеріалів під час деформацій, що не призводять до їх пошкодження чи руйнування. Основними методами дослідження задач у теорії пружності є аналітичні, чисельні та експериментальні підходи. Кожен з цих методів має свої переваги та обмеження в залежності від складності задачі та точності, яку необхідно досягти.

Плоскі задачі теорії пружності [4] вивчають механічну поведінку матеріалів, коли деформація обмежена однією площиною. Основні методи розв'язку плоских задач теорії пружності мають свої особливості. Одним із найбільш ефективних і загальних методів є використання теорії функцій комплексної змінної, яка дозволяє значно спростити математичні обчислення при розв'язанні задач на пружність. Завдяки використанню комплексного аналізу можна отримати точні рішення для певних геометрій і граничних умов, що робить цей метод популярним для розв'язку класичних задач, таких як задача про рівномірно навантажену пластину.

У роботі [5] розглядається класична плоска задача теорії пружності для напівсмуги. Особливу увагу приділено симетричному варіанту задачі, що дозволяє спростити математичний опис граничних умов. Автор застосовує аналітичний підхід для отримання точного розв'язку, що базується на методах комплексного аналізу та функцій напружень. Досліджуються особливості розподілу напружень уздовж граничних поверхонь, що має важливе значення для прогнозування міцності конструкцій та оцінки їхньої довговічності.

Робота [6] присвячена розв'язанню плоскої крайової задачі теорії пружності для прямокутної області. Запропоновано точні аналітичні розв'язки, які базуються на використанні спеціальних функцій та методів комплексного аналізу. Досліджується вплив різних типів граничних умов на розподіл напружень і переміщень у досліджуваній області. Отримані результати можуть бути

використані для проектування механічних елементів, що працюють у складних напружених станах, а також для верифікації чисельних методів розрахунку.

Аналітично-числовий спектральний метод, який пізніше був названий методом Остроградського, заснований на поданні напружень та деформацій через ряди Фур'є. Цей метод є потужним інструментом для розв'язку задач пружності, особливо для задач з регулярними геометріями, таких як прямокутні пластини. Проте його недоліком є чутливість до помилок у числових обчисленнях та необхідність обробки великої кількості даних, що може бути трудомістким. Цей метод представлено в роботах [7-11] для розв'язку плоскої задачі для прямокутної пластини. Серед недоліків є те, що він може бути чутливим до помилок у чисельних обчисленнях і трудомістким. Спектральний метод Штурма–Ліувілля є ефективним інструментом для розв'язку бігармонічного рівняння, що описує згин пластин. Ревенко [9] показав його застосування для точного розрахунку напружено-деформованого стану тонких пластин при різних крайових умовах. У роботі Ревенка (2007) представлено аналітично-числовий метод Остроградського для розв'язку плоскої задачі теорії пружності. Метод базується на розкладі розв'язку у ряди Фур'є, що дозволяє звести рівняння теорії пружності до системи алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується чисельними методами. Автор досліджує ефективність цього підходу для задач із різними граничними умовами та демонструє його високу точність.

Дослідження, представлені в джерелах [12-15], присвячені розв'язанню плоских задач теорії пружності та термопружності за допомогою аналітичних методів. У роботі [12] автори розглядають напружено-деформований стан у прямокутній області, застосовуючи методи функцій напружень, що дозволяють отримати точні аналітичні розв'язки для крайових задач. Аналогічно, у [14] розглядається задача для кільцевого сектора, де використання функцій комплексної змінної забезпечує ефективний підхід до визначення полів напружень і переміщень у пружному середовищі. Подальший розвиток аналітичних методів представлено у [15], де автори застосували функції Вігака для спрощення розрахунку напружено-деформованого стану у прямокутних областях. Цей підхід дозволяє звести задачу

до розв'язку системи рівнянь у компактнішому вигляді, що підвищує обчислювальну ефективність та зменшує складність аналізу механічних напружень. Окрему увагу приділено термопружним задачам у [13], де розглядається задача для прямокутної області в умовах нерівномірного температурного навантаження. Автори застосували метод інтегральних перетворень, що дозволило отримати точні розв'язки для визначення температурних полів і пов'язаних із ними механічних напружень.

Роботи [16-17] присвячені дослідженню плоских задач теорії пружності, зокрема задач, що описують напружено-деформований стан у матеріалах із включеннями. У [16] аналізують розподіл напружень у площині, що містить систему прямолінійних включень. Вони використовують методи комплексного потенціалу для розв'язку задачі, що дозволяє точно визначати напруження в околі включень. Монографія [17] Положого присвячена узагальненню теорії аналітичних функцій комплексної змінної. У ній введено поняття p -аналітичних та (p,q) -аналітичних функцій, що використовуються для дослідження крайових задач теорії пружності. Цей підхід забезпечує можливість узагальнення класичних методів розв'язку та їх адаптацію до задач із складними граничними умовами.

Метод скінченних елементів (МСЕ) [18, 19] є одним із найпоширеніших і найефективніших чисельних методів для розв'язання як статичних, так і динамічних задач теорії пружності в області механіки твердих деформованих тіл. Цей метод дозволяє моделювати та аналізувати поведінку матеріалів із складною геометрією, неоднорідною структурою та комбінованими механічними навантаженнями. Принцип роботи МСЕ полягає в розбитті складної області на невеликі підобласті (скінчені елементи) і подальшій апроксимації розв'язку всередині кожного елемента з використанням базисних функцій (часто поліномів). Завдяки цьому задача зводиться до системи лінійних або нелінійних рівнянь, які вирішуються чисельно. Таким чином, МСЕ є потужним інструментом для чисельного аналізу в механіці матеріалів, забезпечуючи високу точність і гнучкість у моделюванні широкого спектра задач.

Іншим важливим підходом є метод граничних елементів (МГЕ), який застосовується для чисельного розв'язку задач теорії пружності. Цей метод ефективно використовують для моделювання поведінки матеріалів за складних умов граничних і внутрішніх навантажень. МГЕ має кілька переваг: дозволяє точно враховувати різкі зміни в граничних умовах, а також ефективно працює з дуже складними геометриями. Однак точність рішення безпосередньо залежить від якості апроксимації граничних умов, що може призвести до помилок при недостатньо детальному поділі області. У роботі [20] для двовимірних задач термopружності пропонується модифікація методу граничних елементів, яка використовує перетворення граничного інтегрального рівняння за допомогою рядів, що включають функції форми. Це дає змогу більш ефективно обчислювати теплові потоки в матеріалах, що піддаються не лише механічним, а й тепловим навантаженням, і дозволяє отримати точніші результати для практичних задач.

Дослідження [21] зосереджене на чисельному моделюванні антиплоскої деформації тіла з тонкими пружними включеннями. Опанасович та Драган застосовують чисельні методи для аналізу взаємодії включень та оцінки впливу цих включень на загальний розподіл напружень у матеріалі. Автори використовують методи граничних елементів для визначення напруженого стану, що дозволяє оцінити ефекти локалізованих деформацій та можливих зон руйнування.

В статті [22] автори використовують метод граничних інтегральних рівнянь для розв'язку стаціонарної термopружної задачі з мішаними граничними умовами. Вони досліджують температурний розподіл у прямокутній області, поєднуючи це з механічними навантаженнями. Такий підхід дозволяє враховувати одночасно і теплові, і механічні ефекти в матеріалі, що є важливим при проектуванні складних конструкцій, де температура та механічні навантаження взаємодіють.

Метод квадратурних елементів слабкої форми для аналізу плоских задач пружності був представлений в роботі [23]. Для досягнення мети дослідження було встановлено варіаційну постановку плоских задач пружності та введено диференціальний квадратурний аналог похідних у функціоналі. Для перевірки ефективності та перспективності методу було досліджено кілька типових плоских

задач пружності. У роботі обговорюються подібності та відмінності, переваги та недоліки методу квадратурних елементів слабкої форми порівняно з іншими чисельними методами, як правило, з методом скінченних елементів р-версії.

У роботі [24] досліджується двовимірна бігармонічна задача для напівнескінченної смуги з умовами Діріхле на межі. Основна увага приділяється застосуванню методу суперпозиції для побудови розв'язку, що дозволяє розкласти задачу на окремі компоненти з подальшим їхнім об'єднанням. Важливою частиною роботи є дослідження інтегрального рівняння, що описує поведінку функції невідомої щільності, з використанням техніки перетворення Мелліна. Це дозволяє детально проаналізувати асимптотичні властивості розв'язку при наближенні аргументу до нескінченності, що є ключовим для оцінки поведінки розв'язку у віддалених областях. Робота спрямована на розширення можливостей методу суперпозиції у контексті бігармонічних задач і їх застосувань у механіці деформівних середовищ.

Просторові задачі теорії пружності для багатозв'язних тіл становлять складний клас інженерних задач, що враховують тривимірні деформації та напруження в матеріалах, які можуть бути складними або мають неоднорідну структуру. Важливо визначити поведінку таких тіл під дією різноманітних навантажень та у різних точках їхнього об'єму. Монографія [25] містить широкий аналіз точних аналітичних розв'язків для крайових задач механіки деформівних твердих тіл. Основний акцент зроблено на методах сингулярних інтегральних рівнянь, які дозволяють детально дослідити напружено-деформований стан у зонах високої концентрації напружень, зокрема поблизу отворів, розрізів та контактних областей. Автор також розглядає застосування аналітичних методів для моделювання реальних механічних систем із неоднорідностями, що має велике значення для оцінки довговічності матеріалів. У загальному, обидві роботи використовують комбіновані теоретичні методи, що дозволяють отримувати як точні, так і наближені розв'язки для складних механічних задач.

Асимптотичний метод є потужним інструментом для наближеного аналізу задач лінійної та нелінійної пружності. Кагадій та Шпорта [26] продемонстрували

його ефективність для отримання точних аналітичних рішень у випадках з малими параметрами, що дозволяє зменшити обчислювальні витрати при моделюванні складних механічних систем. Дослідження напружено-деформованого стану багатошарових матеріалів є ключовим у механіці композитних структур. Автори [27] представили аналітико-чисельний підхід для оцінки НДС шаруватих основ, що дозволяє визначити оптимальні параметри підкріплюючих елементів у конструкціях також асимптотичним методом. Цей метод зазвичай застосовуються для вирішення задач, де важливі локальні ефекти, наприклад, при великих деформаціях або в умовах складних взаємодій між матеріалом і навантаженням. Асимптотичні методи дозволяють спростити розрахунки, зберігаючи достатню точність для практичних застосувань.

Метод скінченних елементів (МСЕ) [28] є одним із найпотужніших чисельних підходів для розв'язання задач механіки суцільних середовищ, зокрема для аналізу напружено-деформованого стану в областях із розрізами, включеннями та іншими особливостями геометрії. Робота [29] Рудакова К. М. присвячена розробці ефективних алгоритмів застосування методу скінченних елементів для тривимірних крайових задач механіки твердого тіла. Автор досліджує можливості підвищення точності розрахунків шляхом оптимізації обчислювальних процесів та використання адаптивних сіток. Запропоновані підходи покращують ефективність розв'язку задач з урахуванням складних граничних умов, що має велике значення для аналізу конструкційних елементів у машинобудуванні та авіаційній промисловості. Загалом, ці дослідження демонструють ключові переваги МСЕ при моделюванні механічної поведінки складних пружних структур. Використання цього методу дозволяє аналізувати напружено-деформований стан у реальних конструкціях, у тому числі тих, що містять розрізи, включення та неоднорідності матеріалу, забезпечуючи високу точність і обчислювальну ефективність.

В роботах [30, 31] представлено уточнену математичну модель напружено-деформованого стану одновального газотурбінного двигуна, реалізовану з використанням методу скінченних елементів (МСЕ). Особливістю запропонованого підходу є застосування спеціалізованих контактних скінченних

елементів, які дозволяють моделювати умови термоупругого контакту в зоні спраження диска з лопатками. Це забезпечує високу точність моделювання складних механічних і температурних процесів, що виникають під час експлуатації енергетичних установок наземного або плавучого типу.

Дослідження [32-38] присвячені розв'язанню просторових вісесиметричних задач теорії пружності для тіл із сферичними порожнинами та включеннями. У [32] Tsuchida, Nakahara та Kodama аналізують асиметричну задачу для нескінченного пружного тіла, що містить дві сферичні включення. Особливу увагу приділено впливу форми та взаємного розташування включень на розподіл напружень у навколишньому середовищі. Запропоновано підхід, що базується на використанні потенціальних функцій, що дозволяє отримати точні розв'язки у випадках складної геометрії. У статті [33] розглянуто механіку напружень і деформацій у осесиметричних оболонках, які мають шарову структуру і наближаються до сферичних форм. У роботі аналізуються теоретичні підходи до моделювання деформацій таких тіл під впливом різноманітних навантажень. Основна увага приділяється вивченню напружень у шарованих структурах, де важливим аспектом є розподіл навантаження та деформації між шарами оболонки, що має практичне застосування в галузях, де використовуються багатошарові матеріали або конструкції зі сферичною геометрією. Стаття вносить значний внесок у розвиток теорії механіки оболонок, зокрема в області аналізу осесиметричних задач для складних геометричних форм, таких як оболонки з кількома шарами та майже сферичними порожнинами. У [35] Капшивий, Копистра та Ломонос досліджують напружено-деформований стан кулі з неконцентричною кульовою порожниною. Авторами запропоновано метод представлення розв'язків через спеціальні функції, що значно спрощує аналітичний опис задачі. У [34] Капшивий і Ногін досліджують вплив сферичних розрізів у пружному просторі, що є важливим для аналізу руйнування та оцінки міцності матеріалів. Дослідження [36-38] зосереджені на більш складних геометричних постановках. У [36] розглянуто випадок двох сферичних порожнин у пружному просторі, а в [37] досліджується задача для кулі з неконцентричною порожниною. У [38] Ломонос розглядає розв'язок задачі

напруженого стану простору з двома сферичними порожнинами, використовуючи узагальнені аналітичні методи, що враховують складність геометрії.

У роботі [39] досліджуються просторові задачі теорії пружності у термінах напружень. Використовуються аналітичні методи розв'язку, зокрема методи функцій напружень, що дозволяють отримати точні рішення для задач механіки твердого деформівного тіла.

У статті [40] методом теорії потенціалу отримано розв'язок просторової симетричної стаціонарної термопружної задачі з тонким жорстким включенням. Як застосування отриманої задачі для круглого жорсткого включення у просторі під дією однорідного температурного поля.

У роботі [41] досліджуються контактні задачі теорії пружності для областей із складною геометрією та неоднорідностями. Автори застосовують метод r -функцій, що дозволяє аналітично описати геометрію неklasичних областей та будувати точні або наближені розв'язки контактних задач. Основну увагу приділено задачам, у яких розглядається взаємодія пружного тіла зі сторонніми включеннями, тріщинами або іншими структурними особливостями. Робота є важливою у контексті розвитку аналітичних методів розв'язку задач механіки для тіл із нестандартними контурами.

Робота [42] присвячена дослідженню впливу напружень на півсфероїдальну неоднорідність, розташовану на вільній поверхні пружного півпростору. Для розв'язання задачі автори використовують методи інтегральних рівнянь та теорію Ешелябі еквівалентного включення, що дозволяє дослідити поведінку внутрішніх дефектів у матеріалі. Робота є важливою для аналізу напружено-деформованого стану матеріалів з включеннями, зокрема у випадках, коли неоднорідності розташовані на поверхні або поблизу неї. Запропоновані підходи можуть бути застосовані для дослідження матеріалів із мікроструктурними дефектами, що робить цю роботу актуальною для механіки композиційних матеріалів та матеріалознавства.

Узагальнений метод Фур'є (УМФ) є потужним математичним апаратом, який застосовується в теорії пружності для розв'язання крайових задач у просторових

багатозв'язних канонічних областях. Вперше назва УМФ з'являється в докторській дисертації О. Г. Ніколаєва [43] у 1997 р., чому передували його роботи у 80-90-х роках минулого століття. В них було побудовано частинні векторні розв'язки рівняння Ламе і системи рівнянь рівноваги в переміщеннях трансверсально-ізотропних тіл для всіх канонічних просторових областей, межа яких описується координатними поверхнями криволінійних систем координат, в яких повністю розділяються змінні в рівнянні Лапласа. Було сформульовано поняття базисності розв'язків рівняння Ламе в канонічній області і доведено базисність усіх побудованих розв'язків. Для побудованих базисних розв'язків було отримано теореми додавання в парах систем координат зі спільними і довільно зсунутими початками, а також формули повороту. Теореми додавання було також отримано для частинних розв'язків системи рівнянь рівноваги в переміщеннях трансверсально-ізотропних канонічних тіл в парах систем координат зі спільними початками. Деякі з робіт цього періоду наведено в джерелах [44 – 52]. Дослідження О. Г. Ніколаєва та його учнів демонструють ефективність цього методу в аналізі напружено-деформованого стану різних пружних середовищ і надають широкий спектр застосування УМФ для аналізу пружних матеріалів, включаючи циліндричні та сфероїдальні структури, пористі середовища та композиційні матеріали. Деякі з цих робіт наведено в [53 – 55]. Роботи [54] та [55] зосереджені на розробці математичних моделей напруженого стану пористих і композиційних матеріалів.

Сучасні дослідження у сфері термопружності зосереджені на аналізі механічного відгуку матеріалів за умов впливу теплових полів. Одним із ключових напрямів є розв'язання задач для багатозв'язних областей, що містять включення, порожнини або тріщини. Аналітичні та чисельні методи дозволяють досліджувати напружено-деформований стан тіл, враховуючи вплив неоднорідностей матеріалу та геометричної складності. Фундаментальна робота [56] (Richard B. Hetnarski, M. Reza Eslami) є однією з найдетальніших монографій, присвячених термопружності. У ній розглядаються класичні та сучасні підходи до вирішення задач термопружності для різних типів матеріалів, включаючи ізотропні, анізотропні та

багатошарові структури. Основна увага приділяється аналітичним та чисельним методам розв'язку, таким як метод Фур'є, метод інтегральних перетворень, метод граничних елементів та метод скінченних елементів. Автори аналізують вплив градієнтів температури, фазових переходів та змін фізико-механічних характеристик матеріалів, що є важливим для проектування інженерних конструкцій, схильних до температурних навантажень. Робота [57] (А. Д. Коваленко) є однією з класичних праць у галузі термопружності, присвячених математичному моделюванню теплових процесів у пружних тілах. Основна увага зосереджена на побудові математичних моделей, що описують розподіл напружень, деформацій, температурних полів та переміщень у матеріалах під впливом як механічних, так і теплових навантажень. У монографії наведено точні розв'язки для випадків однорідних середовищ, а також розглянуто методи наближеного чисельного аналізу для більш складних геометричних конфігурацій і неоднорідних середовищ. Окремо приділено увагу застосуванню узагальнених функцій Гріна та аналітичних методів інтегрування рівнянь термопружності. Аналітичні методи, представлені у [56] і [57], дозволяють отримувати точні розв'язки для задач термопружності, однак у випадках складної геометрії або неоднорідних матеріалів чисельні методи, такі як метод скінченних елементів (МСЕ) або метод граничних елементів (МГЕ), є більш ефективними.

У багатьох дослідженнях термопружності використовуються методи скінченних елементів та методи граничних елементів для розв'язку термопружних задач у багатозв'язних тілах. Додатково, дослідження можуть включати різні фізичні процеси, такі як тепловий потік, деформація, дифузія та хімічна реакція, що потребують інтегрованого підходу до термопружності. У статті [58] автори використовують узагальнений метод граничних елементів та ітераційну декомпозицію домену як ефективний спосіб моделювання неоднорідних середовищ у контексті термопружності та теплопровідності. Інший підхід демонструється в статті [59], де для реалізації метода граничних елементів у тривимірних задачах термопружності перетворення пов'язаного з температурним полем потрійного інтеграла у поверхневий в граничному інтегральному рівнянні

здійснюється за допомогою функції Гріна. Це значно спрощує обчислення для тіл складної геометрії. У [60] розроблено метод граничних елементів для дослідження стаціонарних теплових і термомеханічних полів у тілах з тріщинами і тонкими пружними включеннями. Останні моделюються на основі принципу спряженості континуумів різної розмірності. Для вирішення поставленої задачі використано метод подвійних граничних елементів разом із отриманими моделями теплопровідності та теплового розширення тонкого включення.

У статті [61] описано метод аналітичного розв'язання задач плоскої пружності та термопружності для площин і напівплощин з неоднорідними властивостями матеріалу в одному з планарних напрямків. Основні рівняння зводяться до інтегрального рівняння, яке розв'язується за допомогою простої ітераційної техніки зі швидкою збіжністю. Цей підхід забезпечує високу точність для задач з багат шаровими структурами.

У [62] досліджено поведінку порожнистих циліндрів з функціонально-градієнтними матеріалами (FGM), які піддаються механічному та термічному навантаженню. Отримано аналітичний розв'язок для розподілу переміщень та напружень за допомогою методів інтегрального та диференціального перетворення, отриманих з рівнянь механічної рівноваги та теплоти. Побудовано чисельні моделі з використанням методу скінченних елементів з USDFLD та методу скінченних різниць для перевірки точності аналітичного рішення. Аналітична формулювання та прогнози чисельного моделювання мають високий рівень узгодженості.

У статті [63] використано теорію аналітичних функцій та формалізм Штроха для побудови інтегральних залежностей та рівнянь типу Сомільяни. Ці рівняння застосовуються для задач термопружності у напівплощині, що містить отвори, тріщини та сторонні включення. Основна перевага формалізму Штроха полягає у можливості врахування всіх можливих комбінацій механічних і теплових крайових умов на межі напівпростору. Інтегральні залежності дозволяють ефективно описувати взаємодію тріщин і включень у матеріалі, що робить цей підхід зручним для аналізу дефектів. Модифікований метод граничних елементів, представлений у

статті, демонструє високу точність розрахунків навіть для задач із сильно неоднорідними включеннями. Зокрема, він дозволяє обчислювати температурні поля та напруження в зонах локалізованих дефектів із мінімальною похибкою.

У роботі [64], як альтернатива методу скінченних елементів, для розв'язання просторових задач теорії пружності та термопружності пропонується метод скінченних комірок, який поєднує в собі ідею фіктивної області з перевагами методу скінченних елементів високого порядку. Цей підхід дозволяє підвищити точність розрахунків для неоднорідних матеріалів і складних геометрій.

У статті [65] запропоновано метод градієнтного згладжування на основі центру краю з використанням елементів низького порядку для пов'язаних задач термопружності. Основним результатом є побудова лінійного градієнтного поля всередині елемента з узгодженим градієнтом в центрі стику елемента, включаючи крайовий центр трикутного елемента та центр грані тетраедричного елемента.

Автори статті [66] застосовували рішення для сталого розподілу температури в прямокутній області та граничний інтегральний метод для отримання наближеного розв'язку для плоскої задачі незв'язної термопружності з механічними граничними умовами різного типу. Автори тез [67] використовують метод відокремлення змінних для аналітичного розв'язання задачі для багат шарового прямокутного паралелепіпеда і використовують гармонічні функції для представлення загального розв'язку. Розв'язок задачі зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь з блочно-діагональними матрицями.

У статті [68] розглядається створення явних розв'язків квазістатичних крайових задач (ККЗ) зв'язаної теорії термопружності для пористої пружної сфери та простору зі сферичною порожниною. Дослідження використовує регулярний розв'язок системи рівнянь для ізотропного пористого матеріалу, що побудований з використанням елементарних функцій (гармонічних, бігармонічних та метагармонічних). У [69] використано елементарні функції для розв'язання задач термопружності для сферичних матеріалів із порожнинами. Гармонічні, бігармонічні та метагармонічні функції дозволяють моделювати розподіл напружень і температур у тривимірних середовищах.

У статті [70] розглядається перша фундаментальна задача термоеластичності для стисненого сфероїда з концентричною сферичною порожниною за допомогою узагальненого методу Фур'є. Цей метод є ефективним для задач із симетричними геометриями, де температурні та механічні впливи можуть бути представлені у вигляді рядів Фур'є. Задача була зведена до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з оператором Фредгольма, якщо граничні поверхні не перетинаються. Оператор Фредгольма забезпечує стабільність розв'язків, особливо для задач із гармонічними збуреннями. Для вирішення цієї системи використовувалися як чисельні, так і аналітичні методи, що дозволяє досягти високої точності. Результати чисельних та аналітичних моделей показали високу узгодженість і демонструють перспективність узагальненого методу Фур'є для задач термопружності. Слід зазначити, що метод є ефективним для багатьох геометрій і відповідні роботи [71 -76] присвячені розв'язку різних задач УМФ.

У статті [77] використано теорію Нунціато-Коуїна для матеріалів з порожнечами з метою розробки теорії термопружних твердих тіл з подвійною пористістю. Відмінність нової теорії полягає у тому, що вона не базується на законі Дарсі. Досліджено деформацію пружного простору з однією сферичною порожниною.

Монографія [78] описує теорію визначення полів температури, напружень і переміщень для деформівних твердих тіл із тонкими включеннями. Основу цієї теорії становлять методи, засновані на апараті функцій комплексної змінної та інтегральних перетворень. Вони забезпечують високу точність для задач із анізотропними матеріалами, що мають неоднорідні термофізичні властивості. У монографії також представлено конкретні двовимірні приклади для різних типів тіл із включеннями. Особливу увагу приділено впливу температурних градієнтів на НДС матеріалів. Методи інтегральних перетворень дозволяють враховувати складні граничні умови та взаємодії між включеннями різної форми й розміру. Метод сингулярних інтегральних рівнянь використовується для визначення температурного та напружено-деформованого стану тіл із тріщинами й включеннями.

Метод скінченних елементів [79-81] передбачає подання конструкції у вигляді сукупності простих підобластей, які називаються скінченними елементами, наприклад, тетраедрів чи шестигранників у тривимірному просторі. У кожному елементі виконують апроксимацію шуканих функцій переміщень поліномами, після чого система рівнянь для всієї конструкції зводиться до алгебраїчних рівнянь для вузлових значень переміщень. У статті [82] розглядається методика, орієнтована на використання методу скінченних елементів для розв'язання геометрично нелінійних задач механіки твердого деформівного тіла, яка базується на принципі віртуальних переміщень. У роботі [83] представлено методику розрахунку напруженого стану складених оболонкових конструкцій на основі рівнянь тривимірної теорії пружності із застосуванням методу скінченних елементів. В рамках однієї розрахункової схеми використано як тривимірні скінченні елементи, так і модифіковані елементи, що враховують припущення теорії оболонок. На прикладі аналізу сферичного резервуара високого тиску з радіальним циліндричним патрубком було продемонстровано ефективність розробленого підходу. У роботі [84] розглядається осесиметрична контактна задача для тришарового пружного циліндра з скінченними розмірами, який має жорсткий нерівномірно нагрітий сердечник та піддається зовнішньому конвективному теплообміну. На можливих контактних поверхнях між циліндром, сердечником і окремими шарами встановлюються умови ідеального одностороннього механічного контакту та неідеального теплового контакту. Задача сформульована у варіаційній постановці, а для її розв'язання запропоновано ітераційний метод, у якому на кожному кроці вирішуються окремі задачі теорії пружності та теплопровідності з використанням методу скінченних елементів для дискретизації.

Дослідження термопружної поведінки неоднорідних циліндричних тіл [85] є актуальною проблемою сучасної механіки, оскільки ці тіла широко використовуються в різних сферах людської діяльності, а також з огляду на стрімкий розвиток технологій виготовлення композитних матеріалів, зокрема функціонально-градієнтних з наперед заданими профілями розподілу

теплофізичних та механічних характеристик. У [86] доповіді описано методику отримання аналітичних розв'язків задач термопружності для порожнистого циліндра за дії осесиметричного теплового навантаження. Коефіцієнти теплопровідності та лінійного теплового розширення взято довільними функціями радіальної координати, а інші властивості матеріалу вважаються сталими. Застосувавши метод безпосереднього інтегрування, відповідну задачу теплопровідності звели до інтегрального рівняння другого роду, яке було аналітично розв'язано з використанням методу резольвенти. У роботі [87] при розв'язуванні стаціонарної термопружної задачі для ізотропного циліндра скінченної довжини температурне поле було розбито на дві складові: симетричну та антисиметричну відносно осьової координати циліндра. У кожному випадку температурне поле знаходять у вигляді ряду Фур'є по осьовій координаті. За радіальною координатою розчини розкладаються в ряди Бесселя – Діні. Після задоволення граничних умов виходить нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується методом удосконаленої редукції. У статті [88] побудовано аналітичний розв'язок тривимірної задачі термопружності для трансверсально-ізотропного простору з внутрішніми стаціонарними джерелами тепла. За допомогою методу прямого інтегрування задачу зведено до системи ключових рівнянь для компонент тензора напружень, яка розв'язується за допомогою подвійного інтегрального перетворення Фур'є.

У цьому дослідженні була досліджена одновимірна вісесиметрична квазістатична зв'язана термопружна задача [89]. Загальні розв'язки її керівних рівнянь були отримані в області перетворення, а також наведено розв'язки в дійсній області для випадків нескінченно довгого суцільного циліндра та нескінченного середовища з циліндричним отвором. Для вирішення цієї задачі використовували перетворення Лапласа, а інверсія до дійсної області була досягнута за допомогою теореми залишків Коші та теореми згортки. Отримані результати були порівняні з опублікованими результатами, де були зроблені подібні припущення та накладені однакові граничні умови, і показали повну згоду.

У статті [90] розглядається задача про визначення температурного поля в порожній скінченній вісесиметричній трубці з матеріалом, який залежить від двох координат, з метою досягнення відсутності термонапружень. Автори отримали точний аналітичний розв'язок задачі, в якому використовуються функції нормального розподілу Гаусса для двокомпонентних функціонально-градієнтних матеріалів з теплофізичними параметрами, що описуються за моделлю простої суміші. Розрахунки показали, що можливо досягнути відсутності термонапружень у трубці, виготовленій з реальних матеріалів, при перепаді температур між поверхнями трубки на декілька сотень градусів.

Розроблена методика [91], що дозволяє визначити статичний термопружний стан шаруватого циліндра з функціонально-градієнтними термочутливими складовими з урахуванням конвективно-променевого теплообміну, що відбувається через залежні від температури густині поверхневих та об'ємних джерел тепла. Для знаходження температурних полів використовуються розв'язки допоміжних задач теплопровідності, що зводяться до розв'язання одного нелінійного алгебраїчного рівняння. У роботі наведено результати числових досліджень. Було отримано розв'язок [92] термопружності для скінченного циліндра з джерелом тепла та конвективним теплообміном за допомогою функцій Гріна, узагальнених функцій та інтегральних перетворень Ганкеля. В чисельних дослідженнях розглянуто випадок тришарового циліндра. У [93] була запропонована модифікація алгоритму побудови аналітичних розв'язків теорії пружності та термопружності для циліндрів з радіально-неоднорідними коаксіальними шарами. Новий підхід базується на використанні класичних похідних за радіальною координатою, що дозволяє спростити побудову повторних інтегральних ядер резольвентного розв'язку.

Наведемо роботи, в яких досліджуються стаціонарні термопружні задачі з тепловиділенням. В [94] розглянуто метод розв'язання осесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тонким термоактивним включенням. Локалізовані тонкі площинні неоднорідності моделюються завісою джерел тепла, які розташовані в площині необмеженого тіла і задаються

перетворенням Ганкеля радіальної змінної деякої параметричної твірної функції. За рахунок такої трансформації також виражений напружено-деформований стан всього тіла. Розв'язок задачі отримано після перетворення сингулярного інтегрального рівняння з ядром Бесселя за допомогою розривних інтегралів Вебера – Шафгейтліна в ряд заданої функції за ортогональною системою поліномів Якобі.

Застосування логарифмічного потенціалу простого шару, термопружного потенціалу переміщень, функції напружень Ері та функції Буссінеска дозволило вирішити стаціонарні двовимірні задачі теплопровідності та термопружності у плоскій деформації півбезмежних тіл за умови тепловиділення у паралельній до межі стрічковій області, де температура або тепловий потік задані. Цей підхід описаний в роботі [95]. Побудова функцій Буссінеска зводиться до вирішення крайових задач для гармонійних функцій у півпросторі. Отримано співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Гріна і можуть бути використані для визначення термопружного стану півпростору внаслідок тепловиділення в області смуги. Стаття [96] присвячена визначенню температурного поля і напруженого стану нескінченного тіла з одним тепловідвідним сферичним включенням за різних теплофізичних і механічних параметрів, а також із системою сферичних термічні включення. Термічні включення - це включення, матеріали яких мають такі ж пружні властивості, як і матеріал матриці. При цьому відрізняються лише коефіцієнти теплопровідності і лінійного теплового розширення. Потужність джерел також постійна. Для одного включення точний розв'язок задачі виходить через фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа. Для системи включень розв'язок фактично отримується методом суперпозиції попереднього розв'язку з потенціалами, зв'язаними з центрами включень. У [97, 98] побудовано функції Буссінеска стаціонарних задач термопружності для півпростору з вільною, жорстко, плавно чи гнучко закріпленою межею при нульовій температурі або теплоізоляції на ньому та дією на нього теплорозсіюючого теплового сферичного включення. Для побудови цих функцій використано термопружні потенціали переміщень у просторі з двома сферичними включеннями. Розглянуто задачу для теплового включення.

Використовується розв'язок задачі для одного включення (потужності постійних джерел) у пружному просторі та метод симетричного або антисиметричного продовження через границю півпростору (метод зображень).

В роботі [99] за дії стаціонарного джерела тепла побудовано функції Буссінеска задачі термопружності за плоскої деформації напівобмеженого тіла з вільною, жорсткою, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій підтримується нульова температура або теплоізоляція. Побудову функцій Буссінеска зведено до розв'язування крайових задач для гармонічних функцій у півпросторі. Отримано співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Гріна і можуть бути використані при визначенні термопружного стану півпростору за тепловиділення у стрічковій області. Була розроблена методика для визначення термопружного стану у багат шарових тілах з урахуванням теплових факторів та фізико-механічних характеристик матеріалу за дії джерел тепла. Для розв'язування задач використовуються перетворення Кірхгофа, ітераційний метод Ньютона, узагальнені функції та функції Гріна. Також заді для багатослойних тіл представлено у роботі [100]. Автор [101] розглядав термічні напруження, зумовлені різницею коефіцієнтів теплового розширення сферичного включення та матриці. Передбачається, що і включення, і матриця мають кубічну симетрію. Для вирішення задачі використано метод еквівалентного включення Ешелбі. У [102] автори, використовуючи загальні розв'язки Лява, будують розв'язки крайових задач для пружного та термопружного простору зі сферичним включенням або порожниною.

В роботах [103-105] представлено задачі для багатозвязних тіл. У роботі Підстригача Я. С. та Коляно Ю. М. [103] досліджуються рівняння узагальненої термопружності для тіл з тонкими включеннями. Автори розглядають математичні аспекти моделювання термопружного стану матеріалів, що містять мікро- та макроскопічні неоднорідності. Запропонований підхід дозволяє враховувати вплив тонких включень на розподіл напружень і температури, що є важливим для прогнозування поведінки конструкційних матеріалів в умовах нерівномірного теплового навантаження. Дослідження Медведєвої Н. Ю. [104] присвячене

розв'язанню задач нелінійної статистичної термopружності для багатозв'язкових областей. Авторка аналізує особливості напружено-деформованого стану матеріалів при дії температурних і механічних навантажень, використовуючи методи нелінійного аналізу. В роботі розглядається вплив складної геометрії областей та взаємодії між різними включеннями на рівноважний стан термopружних тіл. Робота Гузя Г. В. [105] зосереджена на вивченні просторових задач термopружності для багатозв'язкових областей. Вона містить аналіз крайових умов та методів розв'язку задач термopружності у випадках складної геометрії конструкцій. Дослідження спрямоване на розробку методів оцінки напружено-деформованого стану матеріалів, що дозволяє точніше прогнозувати їхню поведінку в умовах складного теплового впливу.

Теорія оптимального керування сьогодні є ключом до розв'язання безлічі практично важливих інженерних задач в усіх галузях людської діяльності. Перелічимо лише окремі з них, не зовсім традиційні: менеджмент і економіка [106], проектування конструкцій [107], біологія [108], страхування [109], фінанси [110]. Окремо слід сказати про проблеми конструювання механічних об'єктів, які планується експлуатувати в умовах температурних полів. Тут температура може виступати як керування при мінімізації напружень в зонах їх можливої концентрації, зокрема на міжфазних границях у складених тілах.

Основним методом для розв'язку задач, що керуються звичайними диференціальними рівняннями, є принцип максимуму Понтрягіна [111, 112]. Приблизно в той же час важливий внесок в теорію зробив Р. Беллман [113, 114], застосувавши створений ним метод динамічного програмування для розв'язання деяких задач оптимальних процесів. Системи керування, об'єкти яких описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних [115, 116], називаються системами з розподіленими параметрами [117]. У роботі [118] розглядаються задачі оптимального керування для об'єктів з розподіленими параметрами, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними параболічного типу.

У роботі Ніколаєва О. Г. [119] розглянуто метод визначення оптимального керування напружено-деформованим станом складного тіла за допомогою стаціонарного температурного поля, для розв'язку було використано узагальнений метод Фур'є (УМФ). Автор пропонує підхід, що дозволяє здійснювати контроль над розподілом напружень і деформацій у матеріалі шляхом регулювання температурного впливу. Запропонований метод базується на використанні рівнянь термопружності та оптимізаційних алгоритмів, що забезпечує можливість керування напружено-деформованим станом у складних багатозв'язкових областях. Особлива увага приділена застосуванню отриманих результатів до проектування конструкцій літальних апаратів, де контроль за напруженнями має критичне значення для забезпечення довговічності та надійності елементів конструкції. Дослідження є цінним внеском у розвиток методів керування механічними характеристиками матеріалів шляхом впливу на їх температурне поле та відкриває можливості для подальших досліджень у сфері оптимального проектування складних технічних систем. Продовження дослідження задачі оптимально керування УМФ було виконано у роботі [120].

У роботах [121-126] було розглянуто задачі оптимального керування термонапруженим станом твердих тіл. Основним методом розв'язку задач було зведення до обернених задач термопружності. З використанням вищезазначеного методу отримано керування нагріванням канонічних тіл з обмеженнями на керування. У роботі [127] на основі оберненої задачі термомеханіки розроблено математичну постановку задачі оптимального (за швидкістю) керування нагріванням термочутливих канонічних тіл (нескінченного шару, порожнистого циліндра або сфери) з обмеженнями на контроль і максимальне тангенціальне термічне напруження з урахуванням пластичної деформації матеріалу; розроблено алгоритм чисельної побудови розв'язку. У роботі [128] розроблено метод квазістатичної оберненої задачі термопружності для розв'язання задачі оптимального (за швидкодією) керування двовимірним неосесиметричним нестаціонарним тепловим режимом у довгому порожнистому циліндрі з обмеженнями на термопружні напруження. За допомогою цього методу задачу

було зведено до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду та розроблено методику його стійкого регуляризованого розв'язку. У роботі [129] описано основні етапи розвитку досліджень, започаткованих професором Вігаком, у галузі теорії та методів оптимального керування тепловими процесами та термонапруженим станом деформованих твердих тіл, теорії обернених задач теплопровідності та термомеханіки, а також математичні методи в механіці твердого тіла, що деформується. У роботі [130] для випадку пружно-пластичного деформування матеріалу сформульована математична постановка і розроблено алгоритм числової побудови розв'язку двовимірної задачі оптимального за швидкодією керування нагріванням довгого термочутливого прямокутного паралелепіпеда за обмежень на керування і максимальну величину інтенсивності дотичних термонапружень.

Статті [131-134] присвячені задачам оптимального керування термопружним станом циліндрів(порожнистого, довгого, складового та ін.). Усі розв'язки було отримано за допомогою градієнтних методів, зворотних крайових задач. Побудовано в явному вигляді вирази градієнтів функціоналів нев'язки для ідентифікації параметрів задачі термопружності. У роботі [135] розглянуто нові задачі оптимального керування розподіленими системами, які описуються крайовими задачами для еліптичного рівняння в об'єднанні двох обмежених строго ліпшицевих областей. Області мають спільну ділянку межі, на якій поставлено умови спряження у вигляді рівняння теплопровідності. Керування входить у праву частину диференціального рівняння. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі показано за допомогою теореми Лакса – Мільграма. Аналогічна теорема для оптимального керування, яке належить опуклій замкненій множині оснащеного гільбертового простору, доводиться за допомогою узагальненого розв'язку спряженого рівняння та квадратичного функціонала вартості. Для всіх описаних випадків доведено теореми існування та єдиності оптимальних керувань. У роботі [136] досліджено питання оптимального керування нестационарним дифузійним процесом в тонкому неоднорідному скінченному стрижні при заданих значеннях температури та потужності теплового потоку на його кінцях з квадратичним функціоналом вартості. Керування здійснюється потужністю теплового потоку на

одному з кінців стрижня. Доводиться теорема, аналогічна теоремі Ліонса, про існування та єдиність розв'язку варіаційної нерівності, яка задає необхідну умову екстремуму функціонала. Наведено схему побудови наближеного розв'язку варіаційної нерівності градієнтним методом за допомогою явних виразів градієнтів функціоналів-нев'язок. У роботі [137] розглядається задача оптимального керування рівнянням теплопровідності в порожньому циліндрі, де керування визначається тепловим потоком на внутрішній поверхні циліндра і функцією теплообміну на зовнішній його поверхні. Застосовано методику зі статті [136]. У чисельному розв'язку використовується метод скінченних елементів. У роботі [138] вивчаються проблеми оптимального керування термопружним станом довгого порожнистого кругового циліндра. Розглядається стаціонарна одновимірна задача термопружності відносно радіального зміщення, яке визначається сталим нормальним навантаженням на поверхнях тіла і стаціонарним радіальним температурним полем. Керування здійснюється тепловим потоком, прикладеним до поверхні порожнини. Для квадратичного функціонала якості поставлено задачу оптимального керування, існування та єдиність розв'язку якої доводиться за допомогою узагальненого розв'язку спряженої задачі. Наближений розв'язок задачі керування знаходиться градієнтним методом.

У роботі [139] для задачі оптимізації термопружності отримані необхідні оптимальні умови за допомогою варіаційного числення, в подальшому розв'язки отримуються за допомогою методу скінченних елементів і сполучених градієнтів.

Авторами [140] розглядається задача щодо визначення оптимального способу нагрівання нескінченно тонкої пластинки, яка має контакт з теплопровідним середовищем вздовж однієї зі своїх поверхонь. Критерієм оптимальності є умова, що полягає в мінімізації функціоналу енергії пружної деформації.

У роботі [141] розглянуто задачу визначення оптимального за напруженнями режиму нагріву кусково-однорідної скляної циліндричної оболонки зі сталою товщиною за умови відсутності зовнішнього навантаження. Оболонка нагрівається конвективно неперервно розподіленими зовнішніми джерелами тепла. Внутрішня

поверхня оболонки є теплоізовованою. Метою задачі є знаходження режиму нагріву зовнішньої поверхні оболонки від початкової температури до заданої, в фіксований момент часу при певних обмеженнях на параметри термонапруженого стану і швидкість нагріву. Критерієм оптимальності вибрано умову мінімуму меридіональних і кругових нормальних напружень. Запропоновано метод, заснований на принципі покроковій параметричній оптимізації з варіюванням значень керуючої функції та уточненням кроку дискретизації. Після усереднення за товщиною оболонки задача фактично стає одновимірною за просторовою змінною. У статті [142] розглянуто задачу оптимального керування осесиметричним термонапруженим станом суцільного циліндричного тіла шляхом зміни розподілу об'ємних джерел тепла. Для розв'язування задачі застосовано підхід, який базується на варіаційному методі однорідних розв'язків, розробленому раніше для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності. Відмітимо також, що при більш широкому трактуванні оптимальності теорія оптимального керування перетинається з теоріями автоматичного і адаптивного керування [143].

Фізико-інформовані нейронні мережі (PINN) востаннє стали досить популярним методом для розв'язання як прямих, так і обернених задач, які контролюються рівняннями в частинних похідних. Основна особливість цього підходу полягає в тому, що він включає залишок рівнянь в частинних похідних у функцію втрат сурогатної моделі, яка базується на нейронній мережі, для невідомого стану системи. Це дозволяє легко поєднувати дані вимірювань з фізичними обмеженнями. В даній роботі [144] автори розширюють цей підхід на задачі оптимального керування.

Стаття [145] спрямована на керування деформацією та температурою термопружного тіла за допомогою зовнішньої сили, яка діє на окрему частину цього тіла. У цьому випадку в основній моделі немає значень у вихідних даних. Відсутність даних у розглянутій моделі вимагає застосування концепції безшкідного керування, яка була введена J. L. Lions для вирішення задач оптимального керування у розподілених системах, де дані відсутні. Система

оптимальності, яка складається з взаємозв'язаних рівнянь та суміжних взаємозв'язаних рівнянь, характеризує оптимальну пару (керуючий стан).

Одною з піонерських робіт, присвячених поширенню принципу максимуму Понтрягіна на диференціальні рівняння в частинних похідних, є стаття [146]. В ній розглядається оптимальне керування напівлінійним еліптичним рівнянням у випадку розподіленого керування в області та на її межі при додаткових обмеженнях на стан системи. В роботі побудовано спряжену крайову задачу, в яку функції штрафу входять як додаткові члени в праві частини диференціального рівняння і граничної умови. Функція Гамільтона формується окремо для області керування та її межі. Отримано необхідну умову існування оптимального керування, на якому обидві функції Гамільтона досягають мінімуму.

У статті [147] розглянуто клас задач оптимального керування для квазілінійних еліптичних рівнянь, в яких коефіцієнти еліптичного диференціального оператора залежать від функції стану. Знайдено умови першого і другого порядку оптимальності. Для цього детально досліджено розв'язки рівняння стану системи та його лінеаризації. Виведено аналог принципу максимуму Понтрягіна та достатні умови оптимальності. У роботі [148] доводиться сильна збіжність чисельної дискретизації задачі оптимального керування для квазілінійного еліптичного рівняння за допомогою метода скінченних елементів для стану та різні види дискретизації для контролю. Для цього отримано оцінки похибок при дискретизації рівняння стану та пов'язаного спряженого рівняння. Регулярні розв'язки цих рівнянь, які необхідні для цього аналізу, знайдено з необхідних умов оптимальності першого порядку, отриманих у статті [147].

У роботі [149] розглядається задача оптимального керування для одного класу нелінійних еліптичних рівнянь типу рівняння Рейнольдса. Доводиться теорема існування та єдиності слабкого розв'язку рівняння стану системи. Також доводиться існування оптимального керування. Використовується методика, яка заснована на теоремах вкладення Соболева. Чисельні результати отримано дискретизацією за допомогою характеристичних функцій інтервалів розбиття.

Наведено застосування для визначення оптимальної відстані записуючої головки від магнітного диску.

У статті [150] розглядається задача оптимального керування для стаціонарного рівняння Стокса. Обмеження на швидкість задається - нормою. Умови оптимальності першого порядку для неперервної та дискретизованої систем виводяться з умов Каруша-Куна-Таккера для функціонала Лагранжа після заміни їх на слабкі диференціальні умови. При дискретизації системи використовуються спектральні наближення Галеркіна, для яких отримано апріорні оцінки похибок. За допомогою ітераційного алгоритму Юзави і проекційної схеми отримано чисельні розв'язки задачі.

У статті [151] розглядається задача оптимального керування в дво- та тривимірних ліпшицевих політопних областях напівлінійним еліптичним рівнянням з граничними умовами першого роду та додатковими обмеженнями на керування. Для запропонованої авторами обчислювальної схеми, яка дискретизує рівняння стану та спряжені рівняння кусково-лінійними функціями, а керуючу змінну кусково-сталими функціями, отримано оцінку точності наближеного розв'язку. Знайдену оцінку похибки розкладено на суму трьох складових, які пов'язані з дискретизацією рівнянь стану та спряженого стану, а також керуючої змінної. Подібна оцінка є важливою при керуванні похибкою в адаптивному методі скінченних елементів.

У роботі [152] розроблено новий підхід до контролю помилок і адаптації методу скінченних елементів при дискретизації задач оптимізації, які керуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. Формалізм Лагранжа використовується для обчислення стаціонарних точок необхідних умов оптимальності першого порядку. Адаптація сітки керується апостеріорними оцінками помилок на основі залишків клітинок сітки. Особливістю розглянутої задачі є природний вибір функціонала контролю помилок, який збігається з функціоналом вартості задачі оптимізації. Множник Лагранжа використовується для зважування залишків клітинок в оцінюванні помилок.

В роботі [153] розглядається оптимізаційна задача для лінійного параболічного рівняння з керуванням, яке входить у праву частину рівняння і в граничну умову. Основним результатом роботи є застосування методу проекції градієнта для знаходження оптимального керування. Знайдено формулу для градієнта функціонала вартості через розв'язок спряженої крайової задачі. Доведено теорему про різні види збіжності послідовності керувань, що мінімізують функціонал вартості. У статті [154] розглядається задача оптимізації для квазілінійного параболічного рівняння, в яке керування входить як векторний параметр в коефіцієнти (включаючи старший) і в граничні умови. Особливістю постановки задачі є те, що керування вважається не процесом, а точкою кулі в скінченновимірному евклідовому просторі. У роботі реалізовано класичний підхід, згідно з яким необхідна умова оптимальності знаходиться з принципу максимуму, який формулюється для функції Гамільтона, побудованої за допомогою розв'язків вихідної та спряженої крайових задач. Чисельний алгоритм розв'язання задачі використовує ітераційну схему і метод спряжених градієнтів.

У роботі [155] досліджуються задачі оптимізації, які керуються напівлінійними параболічними рівняннями з керуванням в граничних умовах. Особливістю задач є поточкові мішані обмеження на керування та стан системи. Вивчаються необхідні умови існування оптимального керування в певних функціональних просторах, а також умови регулярності множників Лагранжа, які використовуються при побудові спряжених рівнянь.

У статті [156] розглядається лінійне параболічне рівняння в області з білінійним керуванням, яке діє на підмножині інтервалу. Коефіцієнт дифузії має виродження в кінцевих точках інтервалу. Авторами доводиться існування та єдиність слабого розв'язку крайової задачі для вихідного рівняння, існування оптимального керування для квадратичного функціонала з регуляризуючим членом. Необхідну умову першого порядку в задачі оптимального керування отримано у вигляді варіаційної нерівності відносно похідної Фреше функціонала вартості. Виводиться також достатня умова існування оптимального керування.

У роботі [157] розглядається мішана цілочислова оптимізація з обмеженнями у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних еволюційного типу. Оператором рівняння є інфінітезимальний генератор рівномірно неперервної підгрупи лінійних обмежених операторів. Дискретизація задачі проводиться за часом після обертання еволюційного оператора за допомогою операції згортки. Дискретизація за просторовими змінними заснована на методі сіток. Дано застосування до розв'язання задачі оптимального розміщення джерел тепла в області при обмеженні їх кількості.

У роботі [158] розглядається задача оптимального керування рівнянням теплопровідності з неопуклими обмеженнями. Задача зв'язана з практичним процесом адитивного шарового виробництва, який використовується для виготовлення тривимірних деталей із металевих порошків шляхом пошарового плавлення матеріалу. Лазерний промінь сканує поверхню деталі, покриту порошком, нагріваючи її до необхідного рівня. Мінімізується квадратичний функціонал зі складовими, які залежать від відхилення температури деталі від номінальної, градієнта температурного поля і керування – траєкторії лазерного променя вздовж області сканування. Умови на траєкторію приводять до неопуклих обмежень на керування. Результатом роботи є необхідна умова оптимальності, отримана у вигляді варіаційної нерівності.

У статті [159] розглядається задача оптимізації для напівлінійного параболічного рівняння, в праву частину якого керування і стан входять у вигляді білінійної форми. Обмеження на керування задаються двома граничними функціями з простору. При певних умовах монотонності інтегрального функціонала в роботі доводиться, що будь-який розв'язок оптимізаційної задачі задається bang-bang функцією, яка будується у вигляді лінійної комбінації характеристичних функцій вимірної множини та її доповнення. Коефіцієнтами при характеристичних функціях є граничні функції, які задають допустиму множину керування. В задачі оптимізація проводиться фактично по областях, які є носіями характеристичних функцій. Подібні задачі відносяться до задач оптимізації форми.

У статті [160] досліджується абстрактне еволюційне рівняння параболічного типу із запізненням, в якому оператор є генератором експоненціально стійкої півгрупи. Запізнення вважається розподіленим на відрізок дійсної осі і входить у стан системи, від якого залежить додатковий член рівняння. Подібним чином формується функціонал вартості. Необхідна умова оптимальності формулюється у вигляді принципу максимуму типу Понтрягіна. Подібні задачі виникають, наприклад, при керуванні потоком тепла в тілах з матеріалів з пам'яттю, де вже виконується узагальнений (не локальний) закон Фур'є.

У роботі [161] розглянуто задачу оптимального керування для векторного напівлінійного параболічного рівняння у часткових похідних. Керуюча змінна входить у матрицю коефіцієнтів при старших похідних. Необхідна умова оптимальності приводить до принципу максимуму, який формулюється аналогічно класичному випадку. Доведення засновано на використанні методу голчастих варіацій, які вибираються таким чином, щоб отримати необхідну диференційовність стану системи відносно керування.

У статті [162] досліджується система, яка описується неявним диференціально – операторним рівнянням параболічного типу, нерозв'язним відносно старшої похідної. Керування входить в праву частину рівняння, як в звичайному, так і в імпульсному вигляді. Оптимізація здійснюється за двома видами керування, причому імпульси розглядаються в фіксовані моменти часу і керуються за допомогою їх інтенсивностей. Окремо розглядається задача з оптимізацією моментів часу дії імпульсів. Метод дослідження засновано на розв'язку диференціального рівняння, побудованого за допомогою операторної півгрупи, яка зображується інтегралом від псевдорезольвенти операторного жмутка.

У статті [163] розглядається лінійно-квадратична задача оптимального керування осесиметричними коливаннями круглої мембрани. За допомогою методу множників Лагранжа отримано необхідні умови оптимальності. Доведено єдиність оптимального керування. Задачу зведено до системи інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті та додаткових умов до неї.

Окремо розглянемо деякі задачі оптимального керування термопружним станом тіл. У статті [164] аналізується зв'язана стаціонарна оптимізаційна термопружна задача для довільного скінченного тіла з мішаними граничними умовами для температурного поля і поля переміщень та граничним керуванням. Методами класичного варіаційного числення за допомогою множників Лагранжа спочатку виводяться необхідні умови оптимальності. Ці умови включають систему диференціальних рівнянь відносно температури, переміщень і спряжених функцій. Для числового розв'язку задачі пропонується метод, у якому просторова дискретизація диференціальних рівнянь досягаються за допомогою методу скінченних елементів, а при мінімізації функціонала вартості - метод спряжених градієнтів. У роботі [165] досліджується постановка та побудова чисельного розв'язку задачі оптимального контролю (в сенсі швидкодії) нагріву пластини внутрішніми джерелами тепла при наявності обмежень на контроль і максимальне за абсолютною величиною термічне напруження. Використовується метод розв'язання оберненої задачі теплопровідності разом з методом скінченних різниць при аналізі прямої задачі. Метою роботи [166] є керування деформацією та температурою термопружного тіла шляхом впливу на нього зовнішньої сили, що діє на його частину. Постановка задачі відрізняється від класичної, оскільки в ній відсутня інформація про початкові дані – переміщення та розподіл температури в тілі. Неповнота даних призвела до необхідності використовувати розвинену Ж.-Л. Ліонсом концепцію безпрограшного контролю (контроль Парето). Для її реалізації авторами введено послідовність функціоналів вартості, яка залежить від додатного параметра. При кожному значенні параметра функціонал вартості відповідає контролю з мінімальним програшом. Показано, що безпрограшний контроль можна отримати із контролю з мінімальним програшом граничним переходом за умови, що зазначений параметр прямує до нуля.

Висновок розділу 1

Проведений огляд літератури засвідчив значний прогрес у розвитку методів розв'язання задач теорії пружності та термопружності як у двовимірних, так і в тривимірних постановках. Увага дослідників була зосереджена як на аналітичних, так і на чисельних підходах, серед яких найбільш поширеними є методи функцій напружень, методи комплексного аналізу, а також чисельні методи — метод скінченних елементів (МСЕ) і метод граничних елементів (МГЕ). Кожен із них має свої переваги та обмеження, що зумовлює вибір методу залежно від характеру задачі, складності геометрії та умов навантаження.

Особливу увагу в літературі приділено задачам для тіл з включеннями, тріщинами, порожнинами та іншими неоднорідностями. Це пов'язано з актуальністю аналізу реальних конструкцій і матеріалів, що мають складну структуру. У цьому контексті важливе місце займають дослідження термопружного стану багатошарових і функціонально-градієнтних матеріалів, для яких характерні неоднорідні фізико-механічні властивості. Розв'язання таких задач потребує не лише високої точності, а й ефективних алгоритмів, здатних враховувати взаємодію різних фізичних полів.

Окрему групу становлять роботи, присвячені задачам оптимального керування напружено-деформованим станом конструкцій. Використання термоуправління як інструменту для мінімізації напружень є перспективним напрямом, що дозволяє покращити надійність і довговічність складних технічних систем.

Серед усіх розглянутих методів особливе місце займає узагальнений метод Фур'є (УМФ). Цей метод виявив себе як потужний інструмент для аналітико-чисельного розв'язання просторових крайових задач у канонічних багатозв'язних областях. Його основними перевагами є можливість побудови базисних розв'язків рівняння Ламе, ефективне відокремлення змінних у складних координатних системах та здатність до точного врахування геометрії й фізичних властивостей матеріалу. Завдяки цьому УМФ не лише доповнює класичні методи, але й відкриває нові можливості для аналізу складних задач механіки деформованого твердого тіла, зокрема у сфері оптимального керування термопружним станом.

РОЗДІЛ 2

РОЗВИТОК АПАРАТУ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ФУРЬЕ

2.1 Інваріантний вісесиметричний базис для рівняння Ламе

Цю главу присвячено подальшому розвитку апарату узагальненого методу Фур'є на вісесиметричні крайові задачі стаціонарної термопружності для простору зі сферичними неоднорідностями. Розвиток полягає в побудові інваріантних вісесиметричних базисних розв'язків рівнянь Ламе і Дюамеля – Неймана в сферичних координатах і отриманні теорем додавання цих розв'язків в однаково напрямлених системах координат, початки яких довільно зсунуті вздовж осі симетрії. На відміну від загальних базисних розв'язків рівняння Ламе в сферичних координатах, які було побудовано в [44], в дисертації використовуються інші розв'язки, в які не входить параметр граничної поверхні.

У тривимірному просторі введемо декартову систему координат (x, y, z) з початком у точці $O(0, 0, 0)$. Сумістимо з декартовою системою сферичну систему координат (r, θ, φ) , $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. В областях $\Omega^\pm = \{(r, \theta, \varphi) : r >_{<} R\}$, які задають зовнішність і внутрішність кулі з центром у початку координат радіуса R , розглянемо набори регулярних вісесиметричних розв'язків рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (2.1)$$

у сферичних координатах

$$w_n^+(r, \theta) = r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad w_n^-(r, \theta) = r^n P_n(\cos \theta). \quad (2.2)$$

Тут $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, $P_n(x)$ – многочлени Лежандра, знак

$+$ ($-$) відповідає області Ω^+ (Ω^-). Функції w_n^+ (w_n^-) будемо називати зовнішніми (внутрішніми) розв'язками рівняння Лапласа для кулі.

Розглянемо рівняння Ламе

$$\Delta \vec{U}(\vec{x}) + (1 - 2\nu)^{-1} \vec{\nabla}(\text{div} \vec{U}(\vec{x})) = 0, \quad (2.3)$$

яке описує вектор переміщень $\vec{U}(\vec{x})$ точки \vec{x} у пружному тілі. Тут ν – коефіцієнт Пуассона, $\vec{\nabla}$ – оператор набла.

Побудуємо набори вісесиметричних розв'язків рівняння Ламе, регулярні в областях Ω^+ (Ω^-).

Оскільки виконуються тотожності

$$\begin{aligned} [\Delta + (1 - 2\nu)^{-1} \vec{\nabla}(\mathbf{div})] \vec{\nabla} &= \Delta \vec{\nabla} + (1 - 2\nu)^{-1} \vec{\nabla}(\mathbf{div} \vec{\nabla}) = \vec{\nabla} \Delta + (1 - 2\nu)^{-1} \vec{\nabla} \Delta = \\ &= \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \vec{\nabla} \Delta, \end{aligned}$$

то розв'язками рівняння Ламе в областях Ω^\pm будуть такі набори векторних функцій:

$$\vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta) = \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta). \quad (2.4)$$

Другий набір розв'язків будемо шукати у вигляді

$$\vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta) = \chi_n^\pm \vec{V}_n^\pm(r, \theta) - \zeta_n^\pm r^2 \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta), \quad \vec{V}_n^\pm(r, \theta) = \vec{\nabla}[r^2 w_n^\pm(r, \theta)], \quad (2.5)$$

де χ_n^\pm, ζ_n^\pm – деякі числові коефіцієнти. Щоб їх знайти, виконаємо попередні перетворення

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \vec{V}_n^\pm(r, \theta) &= \Delta[r^2 w_n^\pm(r, \theta)] = 6w_n^\pm(r, \theta) + 4x \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial x} + 4y \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial y} + 4z \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial z} + \\ &+ r^2 \Delta w_n^\pm(r, \theta) = 6w_n^\pm(r, \theta) + 4r \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial r} = \left\{ \frac{2 - 4n}{6 + 4n} \right\} w_n^\pm(r, \theta), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\Delta \vec{V}_n^\pm(r, \theta) = \vec{\nabla} \Delta[r^2 w_n^\pm(r, \theta)] = \left\{ \frac{2 - 4n}{6 + 4n} \right\} \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta) = \left\{ \frac{2 - 4n}{6 + 4n} \right\} \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{div}[r^2 \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(r^2 \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r^2 \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial z} \right) = \\ &= r^2 \Delta w_n^\pm(r, \theta) + 2r \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial r} = \left\{ \frac{-2 - 2n}{2n} \right\} w_n^\pm(r, \theta), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\Delta[r^2 \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta)] = 6\vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta) + 4r \frac{\partial}{\partial r} \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta) + r^2 \Delta \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta) =$$

$$= 6\vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta) + 4 \begin{Bmatrix} -2-n \\ n-1 \end{Bmatrix} \vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta) = \begin{Bmatrix} -2-4n \\ 4n+2 \end{Bmatrix} \vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta). \quad (2.9)$$

Підставимо вектор-функцію $\vec{W}_{2,n}^{\pm}(r, \theta)$ в ліву частину рівняння Ламе, враховуючи отримані формули

$$\begin{aligned} [\Delta + (1-2\nu)^{-1}\vec{\nabla}(\mathbf{div})]\vec{W}_{2,n}^{\pm}(r, \theta) &= \Delta\vec{W}_{2,n}^{\pm}(r, \theta) + (1-2\nu)^{-1}\vec{\nabla}(\mathbf{div})\vec{W}_{2,n}^{\pm}(r, \theta) = \\ &= \chi_n^{\pm}[\Delta\vec{V}_n^{\pm}(r, \theta) + (1-2\nu)^{-1}\vec{\nabla}(\mathbf{div})\vec{V}_n^{\pm}(r, \theta)] - \\ &- \zeta_n^{\pm}[\Delta(r^2\vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta)) + (1-2\nu)^{-1}\vec{\nabla}(\mathbf{div})(r^2\vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta))] = \\ &= \chi_n^{\pm} \left[\begin{Bmatrix} 2-4n \\ 6+4n \end{Bmatrix} \vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta) + (1-2\nu)^{-1} \begin{Bmatrix} 2-4n \\ 6+4n \end{Bmatrix} \vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta) \right] - \\ &- \zeta_n^{\pm} \left[\mp(4n+2)\vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta) + (1-2\nu)^{-1} \begin{Bmatrix} -2-2n \\ 2n \end{Bmatrix} \vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta) \right] = \\ &= \chi_n^{\pm} \begin{Bmatrix} 2-4n \\ 6+4n \end{Bmatrix} \frac{2-2\nu}{1-2\nu} \vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta) + \frac{\zeta_n^{\pm}}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} (4n+2)(1-2\nu) + 2+2n \\ -(4n+2)(1-2\nu) - 2n \end{Bmatrix} \vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta). \end{aligned}$$

Для того, щоб вектор-функції $\vec{W}_{2,n}^{\pm}(r, \theta)$ були розв'язками рівняння Ламе, виберемо коефіцієнти $\chi_n^{\pm}, \zeta_n^{\pm}$ у такому вигляді:

$$\chi_n^{+} = n(4\nu - 3) + 2\nu - 2, \quad \chi_n^{-} = n(4\nu - 3) + 2\nu - 1, \quad (2.10)$$

$$\zeta_n^{+} = (2n-1)(2\nu-2), \quad \zeta_n^{-} = (2n+3)(2\nu-2). \quad (2.11)$$

Запишемо розвинення розв'язків $\vec{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta)$, $\vec{W}_{2,n}^{\pm}(r, \theta)$ за координатними ортами

$$\vec{W}_{1,n}^{+}(r, \theta) = \frac{1}{r^{n+2}} [-(n+1)P_n(\cos\theta)\vec{e}_r + P_n^1(\cos\theta)\vec{e}_{\theta}], \quad (2.12)$$

$$\vec{W}_{1,n}^{-}(r, \theta) = r^{n-1} [nP_n(\cos\theta)\vec{e}_r + P_n^1(\cos\theta)\vec{e}_{\theta}], \quad (2.13)$$

$$\vec{W}_{2,n}^{+}(r, \theta) = \frac{1}{r^n} [-n(n+3-4\nu)P_n(\cos\theta)\vec{e}_r + (n+4\nu-4)P_n^1(\cos\theta)\vec{e}_{\theta}], \quad (2.14)$$

$$\vec{W}_{2,n}^{-}(r, \theta) = r^{n+1} [(n+1)(n+4\nu-2)P_n(\cos\theta)\vec{e}_r + (n-4\nu+5)P_n^1(\cos\theta)\vec{e}_{\theta}]. \quad (2.15)$$

Наступний результат використовує поняття базисної системи розв'язків рівняння Ламе в однозв'язній канонічній області, введене в роботах [51, 52]. Всюди у подальшому вважаємо, що $\nu \in (0; 0.5)$.

Теорема 2.1. Вектор-функції $\{\vec{W}_{1,0}^+(r, \theta), \vec{W}_{1,n}^+(r, \theta), \vec{W}_{2,n}^+(r, \theta)\}_{n=1}^{\infty}$ утворюють базисну систему розв'язків рівняння Ламе в області Ω^+ . Вектор-функції $\{\vec{W}_{2,0}^-(r, \theta), \vec{W}_{1,n}^-(r, \theta), \vec{W}_{2,n}^-(r, \theta)\}_{n=1}^{\infty}$ утворюють базисну систему розв'язків рівняння Ламе в області Ω^- .

Доведення. Розглянемо крайову задачу в переміщеннях в області Ω^+

$$\Delta \vec{U}(\vec{x}) + (1 - 2\nu)^{-1} \vec{\nabla}(\text{div} \vec{U}(\vec{x})) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega^+, \quad (2.16)$$

$$\vec{U}(\vec{x})|_{\vec{x} \in \partial\Omega^+} = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^{(1)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + b_n^{(2)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta), \quad (2.17)$$

де $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$ – орти сферичної системи координат, $b_0^{(2)} = 0$, а гранична вектор функція задовольняє умову

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(|b_n^{(1)}| + |b_n^{(2)}|) < \infty. \quad (2.18)$$

Будемо шукати розв'язок цієї задачі, регулярний на нескінченності, у вигляді

$$\vec{U}(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n^{(1)} R^{n+2} \vec{W}_{1,n}^+(r, \theta) + a_n^{(2)} R^n \vec{W}_{2,n}^+(r, \theta)]. \quad (2.19)$$

Після переходу до координатного запису базисних переміщень і задоволення граничної умови отримаємо алгебраїчну систему

$$\begin{cases} a_0^{(1)} = -b_0^{(1)}, a_0^{(2)} = 0, \\ \begin{cases} -(n+1)a_n^{(1)} - n(n-4\nu+3)a_n^{(2)} = b_n^{(1)}, \\ a_n^{(1)} + (n+4\nu-4)a_n^{(2)} = b_n^{(2)}, \end{cases} n \geq 1, \end{cases}$$

яка має розв'язок

$$a_n^{(1)} = \frac{(n+4\nu-4)b_n^{(1)} + n(n-4\nu+3)b_n^{(2)}}{\Delta_n}, \quad a_n^{(2)} = -\frac{b_n^{(1)} + (n+1)b_n^{(2)}}{\Delta_n}, \quad (2.20)$$

де

$$\Delta_n = 2[(3-4\nu)n + 2 - 2\nu]. \quad (2.21)$$

При $\nu \in (0; 0.5)$, $n \in \mathbb{N}$ виконується оцінка

$$\Delta_n > 2(n+1). \quad (2.22)$$

Підставимо отримані коефіцієнти в ряд для переміщення $\vec{U}(\vec{x})$. Після деяких перетворень маємо

$$\begin{aligned} \vec{U}(\vec{x}) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^n} [b_n^{(1)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + b_n^{(2)} P_n^1 \cos \theta \vec{e}_\theta] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+4\nu-4)b_n^{(1)} + n(n-4\nu+3)b_n^{(2)}}{\Delta_n} \left(\frac{R^{n+2}}{r^{n+2}} - \frac{R^n}{r^n} \right) [-(n+1)P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1 \cos \theta \vec{e}_\theta]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Скористаємось оцінками функцій Лежандра

$$|P_n(\cos \theta)| \leq 1, \quad |P_n^1 \cos \theta| \leq n+1,$$

щоб дослідити збіжність рядів у попередній формулі. На проміжку $r \in [R, \infty)$ указані функціональні ряди мажоруються числовими рядами

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^n} |b_n^{(1)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + b_n^{(2)} P_n^1 \cos \theta \vec{e}_\theta| + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(n+4\nu-4)b_n^{(1)} + n(n-4\nu+3)b_n^{(2)}}{\Delta_n} \left(\frac{R^{n+2}}{r^{n+2}} - \frac{R^n}{r^n} \right) [-(n+1)P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1 \cos \theta \vec{e}_\theta] \right| \leq \\ & \leq \sum_{n=0}^{\infty} (|b_n^{(1)}| + (n+1)|b_n^{(2)}|) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(|b_n^{(1)}| + n|b_n^{(2)}|). \end{aligned} \quad (2.24)$$

З умови (2.18) випливає, що числові ряди праворуч у (2.24) збігаються, тобто функціональні ряди в (2.23) збігаються рівномірно відносно $r \in [R, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$.

Тоді виконуються умови:

$$\vec{U}(\vec{x}) \in C^2(\Omega^+) \cap \overline{C(\Omega^+)}, \quad (2.25)$$

$$\lim_{r \rightarrow R} \vec{U}(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n^{(1)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + b_n^{(2)} P_n^1 \cos \theta \vec{e}_\theta]. \quad (2.26)$$

Таким чином, доведено базисність системи розв'язків $\{\vec{W}_{1,n}^+(r, \theta), \vec{W}_{2,n}^+(r, \theta)\}_{n=0}^{\infty}$ рівняння Ламе в області Ω^+ . Для внутрішніх розв'язків доведення аналогічне.

2.2 Частинні розв'язки рівняння Дюамеля - Неймана

Розглянемо в областях Ω^\pm рівняння Дюамеля – Неймана

$$\Delta \vec{U}(\vec{x}) + \frac{1}{1-2\nu} \vec{\nabla}(\mathbf{div} \vec{U}(\vec{x})) = \alpha \frac{2+2\nu}{1-2\nu} \vec{\nabla} T(\vec{x}), \quad (2.27)$$

яке описує переміщення в пружних тілах при наявності температурного поля. Тут $T(\vec{x})$ – стаціонарне температурне поле в областях Ω^\pm , α – коефіцієнт лінійного температурного розширення. Будемо шукати частинний розв'язок цього рівняння в областях Ω^\pm у вигляді

$$\vec{U}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}), \quad (2.28)$$

де $\Phi(\vec{x})$ – деяка допоміжна функція. Підстановка (2.28) у рівняння Дюамеля – Неймана показує, що воно буде задоволено, якщо функцію $\Phi(\vec{x})$ вибрати як розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta \Phi(\vec{x}) = 2\alpha^\nu T(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega^\pm, \quad (2.29)$$

$$\text{де } \alpha^\nu = \frac{\alpha}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu}.$$

Далі буде потреба у розв'язках рівняння (2.29) в областях Ω^\pm для температурних полів, які задаються функціями: $w_n^\pm(r, \theta)$, $r^2 w_n^\pm(r, \theta)$. Таким полям задовольняють допоміжні функції $\Phi_n^\pm(r, \theta)$ і $\Phi_n^{-(1)}(r, \theta)$, які є відповідно бігармонічними і полігармонічними функціями третього порядку. Перше твердження випливає з формули (2.6) і приводить до функцій

$$\Phi_n^\pm(r, \theta) = \alpha^\nu \left\{ \begin{matrix} (1-2n)^{-1} \\ (2n+3)^{-1} \end{matrix} \right\} r^2 w_n^\pm(r, \theta). \quad (2.30)$$

Друге твердження є наслідком перетворення

$$\begin{aligned} \Delta[r^4 w_n^-(r, \theta)] &= 20r^2 w_n^-(r, \theta) + 8r^3 \frac{\partial w_n^-(r, \theta)}{\partial r} + r^4 \Delta w_n^-(r, \theta) = \\ &= 20r^2 w_n^-(r, \theta) + 8nr^2 w_n^-(r, \theta) = 4(2n+5)r^2 w_n^-(r, \theta), \end{aligned} \quad (2.31)$$

звідки

$$\Phi_n^{-(1)}(r, \theta) = \frac{\alpha^\nu}{2} (2n+5)^{-1} r^4 w_n^-(r, \theta). \quad (2.32)$$

Таким чином, частинні розв'язки рівняння (2.27), які відповідають температурним полям $w_n^\pm(r, \theta)$, $r^2 w_n^\pm(r, \theta)$ мають вид

$$\vec{U}_n^\pm(r, \theta) = \vec{\nabla} \Phi_n^\pm(r, \theta) = \alpha^\nu \left\{ \begin{matrix} (1-2n)^{-1} \\ (2n+3)^{-1} \end{matrix} \right\} \vec{\nabla} [r^2 w_n^\pm(r, \theta)] = \alpha^\nu \left\{ \begin{matrix} (1-2n)^{-1} \\ (2n+3)^{-1} \end{matrix} \right\} \vec{V}_n^\pm(r, \theta), \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_n^{-(1)}(r, \theta) &= \vec{\nabla} \Phi_n^{-(1)}(r, \theta) = \frac{\alpha^\nu}{2} (2n+5)^{-1} \vec{\nabla} [r^4 w_n^-(r, \theta)] = \\ &= \frac{\alpha^\nu}{2} (2n+5)^{-1} \vec{V}_n^{-(1)}(r, \theta), \quad \vec{V}_n^{-(1)}(r, \theta) = \vec{\nabla} [r^4 w_n^-(r, \theta)]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Запишемо переміщення (2.33), (2.34) у вигляді розвинення за координатним базисом сферичної системи координат

$$\vec{U}_n^\pm(r, \theta) = \alpha^\nu \left\{ \begin{matrix} (1-2n)^{-1} \\ (2n+3)^{-1} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r^{-n} \\ r^{n+1} \end{matrix} \right\} \left[\left\{ \begin{matrix} 1-n \\ n+2 \end{matrix} \right\} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta \right], \quad (2.35)$$

$$\vec{U}_n^{-(1)}(r, \theta) = \frac{\alpha^\nu}{2} (2n+5)^{-1} r^{n+3} \left[(n+4) P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta \right]. \quad (2.36)$$

2.3 Напруження на поверхні сфери, які відповідають введеним переміщенням

Як відомо [2], поле пружних переміщень $\vec{U}(\vec{x})$ на гладкій поверхні Γ з одиничним вектором нормалі \vec{n} , розташованій в області поля, створює напруження

$$F_n \vec{U} = 2G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \vec{n} \text{div} \vec{U} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial n} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}) \right], \quad (2.37)$$

де G – модуль зсуву. Застосуємо цю формулу до базисних переміщень (2.4), (2.5) на сферичній поверхні $r = R$ з вектором нормалі $\vec{n} = \vec{e}_r$. Обчислимо окремі складові в формулі (2.37) для базисних переміщень. Для першого набору базисних розв'язків рівняння Ламе з (2.4) впливає

$$\text{div} \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta) = \text{div} [\vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta)] = \Delta w_n^\pm(r, \theta) = 0, \quad \text{rot} \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta) = \text{rot} [\vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta)] = 0. \quad (2.38)$$

Тому напруження мають вигляд

$$F_r \vec{W}_{1,n}^+(r, \theta) = -2G \frac{(n+2)}{r^{n+3}} [-(n+1)P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta], \quad (2.39)$$

$$F_r \vec{W}_{1,n}^-(r, \theta) = 2G(n-1)r^{n-2} [nP_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta]. \quad (2.40)$$

Для другого набору базисних розв'язків (2.5) з використанням формул (2.6), (2.8), (2.10), (2.11), (2.14), (2.15) отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta) &= \chi_n^\pm \mathbf{div} \vec{V}_n^\pm(r, \theta) - \zeta_n^\pm \mathbf{div}[r^2 \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta)] = \chi_n^\pm \left\{ \frac{2-4n}{6+4n} \right\} w_n^\pm(r, \theta) - \\ &- \zeta_n^\pm \left\{ \frac{-2-2n}{2n} \right\} w_n^\pm(r, \theta) = 2 \left\{ \frac{(2n-1)n(1-2\nu)}{(2n+3)(n+1)(2\nu-1)} \right\} w_n^\pm(r, \theta), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta) &= \chi_n^\pm \mathbf{rot} \vec{V}_n^\pm(r, \theta) - \zeta_n^\pm \mathbf{rot}[r^2 \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta)] = -\zeta_n^\pm \mathbf{rot}[r^2 \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta)] = \\ &= -\zeta_n^\pm \mathbf{rot}[r^2 \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta)] = -\zeta_n^\pm \left\{ \left[2y \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial z} - 2z \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial y} \right] \vec{e}_x + \right. \\ &+ \left[2z \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial x} - 2x \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial z} \right] \vec{e}_y + \left[2x \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial y} - 2y \frac{\partial w_n^\pm(r, \theta)}{\partial x} \right] \vec{e}_z \Big\} = \\ &= -2\zeta_n^\pm (\vec{r} \times \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta)) = -2\zeta_n^\pm (\vec{e}_r \times r \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta)), \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\vec{e}_r \times \mathbf{rot} \vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta)] &= -\zeta_n^\pm [\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times r \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta))] = -\zeta_n^\pm [\vec{e}_r (\vec{e}_r, r \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta)) - \\ &= -\zeta_n^\pm [\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times r \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta))] = -\zeta_n^\pm [\vec{e}_r (\vec{e}_r, r \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta)) - r \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta) (\vec{e}_r, \vec{e}_r)] = \\ &= \zeta_n^\pm [r \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta) - \vec{e}_r (\vec{e}_r, r \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta))] = \zeta_n^\pm (r \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta), \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Підставимо (2.31), (2.43) у (2.37)

$$\begin{aligned} F_r \vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta) &= 2G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \vec{e}_r \mathbf{div} \vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta) + \frac{\partial \vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{2} (\vec{e}_r \times \mathbf{rot} \vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta)) \right] = \\ &= 2G \left[2\nu \left\{ \frac{(2n-1)n}{-(2n+3)(n+1)} \right\} w_n^\pm(r, \theta) \vec{e}_r + (2\nu-2) \left\{ \frac{r^{-n-1}(2n-1)}{r^n(2n+3)} \right\} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta + \right. \\ &+ \left. \left\{ \frac{r^{-n-1}}{r^n} \right\} \left(\left\{ \frac{n^2(n+3-4\nu)}{(n+1)^2(n+4\nu-2)} \right\} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \left\{ \frac{-n(n+4\nu-4)}{(n+1)(n-4\nu+5)} \right\} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2G \left\{ \begin{matrix} r^{-n-1} \\ r^n \end{matrix} \right\} \left[\left\{ \begin{matrix} n(n^2 + 3n - 2\nu) \\ (n+1)(n^2 - n - 2\nu - 2) \end{matrix} \right\} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \begin{matrix} -(n^2 + 2\nu - 2) \\ (n^2 + 2n + 2\nu - 1) \end{matrix} \right\} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta \right]. \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Тепер знайдемо напруження на сферичній поверхні $r = R$ з вектором нормалі $\vec{n} = \vec{e}_r$, які відповідають термопружним переміщенням (2.33), (2.34). Для цього треба використати формулу, аналогічну (2.37), але, яка враховує температурне поле

$$F_n \vec{U}^T = 2G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \vec{n} \text{div} \vec{U}^T + \frac{\partial \vec{U}^T}{\partial n} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}^T) - \frac{2-2\nu}{1-2\nu} \alpha^\nu T \vec{n} \right]. \quad (2.45)$$

Користуючись формулами (2.6), (2.31), (2.33) – (2.36), отримаємо

$$\text{div} \vec{U}_n^\pm(r, \theta) = \alpha^\nu \left\{ \begin{matrix} (1-2n)^{-1} \\ (2n+3)^{-1} \end{matrix} \right\} \text{div} \vec{V}_n^\pm(r, \theta) = 2\alpha^\nu w_n^\pm(r, \theta), \quad (2.46)$$

$$\text{div} \vec{U}_n^{-(1)}(r, \theta) = \frac{\alpha^\nu}{2} (2n+5)^{-1} \text{div} \vec{V}_n^{-(1)}(r, \theta) = 2\alpha^\nu r^2 w_n^-(r, \theta), \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \vec{U}_n^\pm(r, \theta)}{\partial r} = \alpha^\nu \left\{ \begin{matrix} r^{-n-1} \\ r^n \end{matrix} \right\} \left[\left\{ \begin{matrix} \frac{n(n-1)}{1-2n} \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \end{matrix} \right\} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \left\{ \begin{matrix} \frac{n}{2n-1} \\ \frac{n+1}{2n+3} \end{matrix} \right\} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta \right], \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \vec{U}_n^{-(1)}(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\alpha^\nu}{2} \frac{n+3}{2n+5} r^{n+2} \left[(n+4) P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta \right]. \quad (2.49)$$

Підставимо (2.46) – (2.49) у (2.37)

$$\begin{aligned}
F_r \vec{U}_n^\pm(r, \theta) &= 2G \alpha^\nu \left\{ \begin{matrix} r^{-n-1} \\ r^n \end{matrix} \right\} \left[\left\{ \begin{matrix} \frac{n(n-1)}{1-2n} - 2 \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} - 2 \end{matrix} \right\} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \begin{matrix} \frac{n}{2n-1} \\ \frac{n+1}{2n+3} \end{matrix} \right\} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta \right], \quad (2.50)
\end{aligned}$$

$$F_r \vec{U}_n^{-(1)}(r, \theta) = 2G\alpha^\nu r^{n+2} \left[\left(\frac{(n+3)(n+4)}{2(2n+5)} - 2 \right) P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \frac{(n+3)}{2(2n+5)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta \right]. \quad (2.51)$$

Тепер знайдемо напруження на поверхні $r = R$ з одиничним вектором нормалі $\vec{n} = \vec{e}_\theta$. Оскільки декартовими координатами базисних ортів сферичної системи координат є такі:

$$\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad \vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta),$$

то виконуються наступні формули диференціювання ортів

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) = \vec{e}_\theta, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta) = -\vec{e}_r, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (2.53)$$

Для подальшого є потреба в формулах диференціювання функцій Лежандра

$$\frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} = P_n^1(\cos \theta), \quad \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta) - n(n+1) P_n(\cos \theta). \quad (2.54)$$

Враховуючи формули (2.12), (2.13), (2.37), (2.38), (2.52) – (2.54), можна записати

$$\begin{aligned} F_\theta \vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta) &= 2G \left\{ \begin{matrix} r^{-n-3} \\ r^{n-2} \end{matrix} \right\} \left[\left\{ \begin{matrix} -n-1 \\ n \end{matrix} \right\} (P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n(\cos \theta) \vec{e}_\theta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \vec{e}_\theta - P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_r \right] = \\ &= 2G \left\{ \begin{matrix} r^{-n-3} \\ r^{n-2} \end{matrix} \right\} \left[\left\{ \begin{matrix} -(n+2) \\ n-1 \end{matrix} \right\} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_r + \left(\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \left\{ \begin{matrix} -(n+1) \\ n \end{matrix} \right\} P_n(\cos \theta) \right) \vec{e}_\theta \right]. \quad (2.55) \end{aligned}$$

Тепер користуючись формулами (2.14), (2.15), (2.42), знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{W}_{1,n}^+(r, \theta)}{\partial \theta} &= \left\{ \begin{matrix} r^{-n-1} \\ r^n \end{matrix} \right\} \left[\left\{ \begin{matrix} -n(n+3-4\nu) \\ (n+1)(n+4\nu-2) \end{matrix} \right\} (P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n(\cos \theta) \vec{e}_\theta) + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \begin{matrix} (n+4\nu-4) \\ (n-4\nu+5) \end{matrix} \right\} \left(\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \vec{e}_\theta - P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_r \right) \right] = \\ &= \left\{ \begin{matrix} r^{-n-1} \\ r^n \end{matrix} \right\} \left[\left\{ \begin{matrix} -n^2 + (4\nu-4)n + 4 - 4\nu \\ n^2 + (4\nu-2)n + 8\nu - 7 \end{matrix} \right\} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_r + \right. \end{aligned}$$

$$+\left(\left\{\frac{(n+4\nu-4)}{(n-4\nu+5)}\right\}\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta}+\left\{\frac{-n(n+3-4\nu)}{(n+1)(n+4\nu-2)}\right\}P_n(\cos\theta)\right)\vec{e}_\theta, \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{e}_\theta \times \mathbf{rot} \vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta) &= -\zeta_n^\pm[\vec{e}_\theta \times (\vec{r} \times \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta))] = -\zeta_n^\pm[\vec{e}_r(\vec{e}_\theta, r\vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta)) - \\ &- \vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta)(\vec{e}_\theta, \vec{r})] = -\zeta_n^\pm \vec{e}_r(\vec{e}_\theta, r\vec{\nabla} w_n^\pm(r, \theta)) = -\zeta_n^\pm \left\{ \frac{r^{-n-1}}{r^n} \right\} P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_r. \end{aligned} \quad (2.57)$$

З формул (2.41), (2.56), (2.57) остаточно впливає

$$\begin{aligned} F_\theta \vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta) &= 2G \left\{ \frac{r^{-n-1}}{r^n} \right\} \left[\left\{ \frac{-n^2+2-2\nu}{n^2+2n+2\nu-1} \right\} P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_r + \right. \\ &+ \left. \left(\left\{ \frac{(n+4\nu-4)}{(n-4\nu+5)} \right\} \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} + \left\{ \frac{n[(4\nu-1)n-3+2\nu]}{(n+1)[(1-4\nu)n-2\nu-2]} \right\} P_n(\cos\theta) \right) \vec{e}_\theta \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Отримаємо подібні формули для термопружних переміщень. Користуючись (2.35), (2.36) знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{U}_n^\pm(r, \theta)}{\partial \theta} &= \alpha^\nu \left\{ \frac{(1-2n)^{-1}}{(2n+3)^{-1}} \right\} \left\{ \frac{r^{-n-1}}{r^n} \right\} \left[\left\{ \frac{1-n}{n+2} \right\} (P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_r + P_n(\cos\theta) \vec{e}_\theta) + \right. \\ &+ \left. \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \vec{e}_\theta - P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_r \right] = \alpha^\nu \left\{ \frac{(1-2n)^{-1}}{(2n+3)^{-1}} \right\} \left\{ \frac{r^{-n-1}}{r^n} \right\} \left[\left\{ \frac{-n}{n+1} \right\} P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_r + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} + \left\{ \frac{1-n}{n+2} \right\} P_n(\cos\theta) \right) \vec{e}_\theta \right], \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{U}_n^{-(1)}(r, \theta)}{\partial \theta} &= \\ &= \frac{\alpha^\nu}{2} (2n+5)^{-1} r^{n+2} \left[(n+4) (P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_r + P_n(\cos\theta) \vec{e}_\theta) + \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \vec{e}_\theta - P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_r \right] = \\ &= \frac{\alpha^\nu}{2} (2n+5)^{-1} r^{n+2} \left[(n+3) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_r + \left(\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} + (n+4) P_n(\cos\theta) \right) \vec{e}_\theta \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Тепер з формул (2.45) – (2.47), (2.59), (2.60) остаточно отримаємо

$$\begin{aligned}
F_\theta \vec{U}_n^\pm(r, \theta) = 2G\alpha^\nu \left\{ \frac{r^{-n-1}}{r^n} \right\} & \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} P_n(\cos \theta) \vec{e}_\theta - \frac{2-2\nu}{1-2\nu} P_n(\cos \theta) \vec{e}_\theta + \left\{ \frac{n}{2n-1} \frac{2n-1}{n+1} \right\} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_r + \right. \\
& + \left. \left(\left\{ \frac{1}{2n-1} \right\} \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \left\{ \frac{n-1}{2n-1} \frac{2n-1}{n+2} \right\} P_n(\cos \theta) \right) \vec{e}_\theta \right] = 2G\alpha^\nu \left\{ \frac{r^{-n-1}}{r^n} \right\} \left[\left\{ \frac{n}{2n-1} \frac{2n-1}{n+1} \right\} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_r + \right. \\
& + \left. \left(\left\{ \frac{1}{2n+3} \right\} \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \left\{ \frac{n-1}{2n-1} - 2 \right\} \frac{2n-1}{n+2} \right) P_n(\cos \theta) \right] \vec{e}_\theta, \quad (2.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\theta \vec{U}_n^{-(1)}(r, \theta) = 2G\alpha^\nu r^{n+2} & \left\{ \frac{(n+3)}{2(2n+5)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_r + \right. \\
& + \left. \left[\frac{1}{2(2n+5)} \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \left(\frac{n+4}{2(2n+5)} - 2 \right) P_n(\cos \theta) \right] \vec{e}_\theta \right\}. \quad (2.62)
\end{aligned}$$

2.4 Теорема додавання для базисних розв'язків рівняння Ламе

В тривимірному просторі зафіксуємо дві різні точки O_j ($j = 1, 2$). З кожною з цих точок сумістимо однаково напрямлені декартові системи координат (x_j, y_j, z_j) , які розташовані так, що осі $O_j z$ мають напрям вектора $\overrightarrow{O_1 O_2} = (0, 0, z_{12})$, $z_{12} > 0$. Разом з декартовими розглянемо сферичні системи координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ з однаковим напрямком осей і початками в заданих точках O_j . Уведені координати пов'язані формулами:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2 + z_{12}, \quad (2.63)$$

$$x_j = r_j \sin \theta_j \cos \varphi_j, \quad y_j = r_j \sin \theta_j \sin \varphi_j, \quad z_j = r_j \cos \theta_j. \quad (2.64)$$

Розглянемо набори вісесиметричних розв'язків рівняння Лапласа (2.2) у сферичних координатах $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$. Для відповідних розв'язків бігармонічного рівняння виконується наступна теорема.

Теорема 2.2. При виконанні умови $r_{3-j} < z_{12}$ правильними є формули:

$$r_j^2 w_n^+(r_j, \theta_j) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \left[\frac{1}{z_{12}^{n+k-1}} \frac{2nk - n - k}{(n+k)(2k-1)} - \frac{r_{3-j}^2}{z_{12}^{n+k+1}} \frac{2n-1}{2k+3} \right] w_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}), \quad (2.65)$$

де $n = 0 \div \infty$; $j = 1, 2$; $h_{n,k}^{(j)} = (-1)^{jk+(j-1)n} \frac{(n+k)!}{n!k!}$.

Доведення. Скористаємось теоремами додавання для гармонічних функцій (2.2) [74]

$$w_n^+(r_j, \theta_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} w_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}), \quad n = 0 \div \infty; \quad j = 1, 2. \quad (2.66)$$

З формули (2.66) випливає, що

$$\begin{aligned} r_j^2 w_n^+(r_j, \theta_j) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} (r_{3-j}^2 - 2(-1)^j z_{12} z_{3-j} + z_{12}^2) w_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} (r_{3-j}^2 + z_{12}^2) w_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) - (-1)^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k}} r_{3-j}^{k+1} \cos \theta_{3-j} P_k(\cos \theta_{3-j}). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Користуючись рекурентними формулами для многочленів Лежандра, останню суму в (2.67) можна перетворити так

$$-(-1)^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k}} \frac{r_{3-j}^{k+1}}{2k+1} \left[(k+1) P_{k+1}(\cos \theta_{3-j}) + k P_{k-1}(\cos \theta_{3-j}) \right]$$

і після деяких перетворень записати таким чином:

$$= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k-1}} \frac{2k^2}{(2k-1)(n+k)} w_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \frac{2(n+k+1)}{2k+3} r_{3-j}^2 w_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}).$$

Підставляючи цей результат у формулу (2.67), отримаємо

$$r_j^2 w_n^+(r_j, \theta_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} z_{12}^2 \left[1 - \frac{2k^2}{(2k-1)(n+k)} \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \left[1 - \frac{2n+2k+2}{2k+3} \right] r_{3-j}^2 w_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j})$$

,звідки випливає остаточний результат.

Зауваження. Можна довести, що при $n = 0$ коефіцієнт

$$\frac{2nk - n - k}{(n + k)(2k - 1)} = -\frac{1}{2k - 1}.$$

Тепер розглянемо базисні розв'язки рівняння Ламе і векторного бігармонічного рівняння (2.4), (2.5) в сферичних системах координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$, зв'язаних з точками O_j . Для цих розв'язків отримано нові теореми додавання, наведені далі.

Теорема 2.3. При виконанні умови $r_{3-j} < z_{12}$ правильними є формули:

$$\vec{W}_{1,n}^+(r_j, \theta_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}), \quad (2.68)$$

$$\vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \left[z_{12}^2 \gamma_{n,k}^{(1)} \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) - \gamma_{n,k}^{(2)} \vec{W}_{2,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) \right], \quad (2.69)$$

$$\vec{V}_n^+(r_j, \theta_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \left[z_{12}^2 \lambda_{n,k}^{(1)} \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) - \lambda_{n,k}^{(2)} \vec{V}_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) \right], \quad (2.70)$$

де $n = 0 \div \infty$; $j = 1, 2$;

$$\gamma_{n,k}^{(1)} = \frac{n(2nk - n - k - 4\nu + 4)}{(n + k)(2k - 1)}, \quad \gamma_{n,k}^{(2)} = \frac{n(2n - 1)}{(2k + 3)(k + 1)}; \quad (2.71)$$

$$\lambda_{n,k}^{(1)} = \frac{2nk - n - k}{(n + k)(2k - 1)}, \quad \lambda_{n,k}^{(2)} = \frac{2n - 1}{2k + 3}. \quad (2.72)$$

Зауваження. При $n = 0$ коефіцієнт $\gamma_{n,k}^{(1)} = \frac{n(2nk - n - k - 4\nu_0 + 4)}{(n + k)(2k - 1)}$ уважається

рівним нулю, а $\lambda_{0,k}^{(1)} = -\frac{1}{(2k - 1)}$ при всіх k .

Доведення. Формули (2.68), (2.70) безпосереднє випливають з теореми додавання гармонічних (2.66) і бігармонічних (2.65) функцій. Доведемо формулу (2.69).

Користуючись теоремами додавання (2.65), (2.66), другий набір базисних розв'язків рівняння Ламе можна подати у вигляді

$$\vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j) = (\chi_n^+ - \zeta_n^+) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \left[z_{12}^2 \lambda_{n,k}^{(1)} \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) - \lambda_{n,k}^{(2)} \vec{V}_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) \right] +$$

$$+\zeta_n^+ \vec{\nabla}(r_j^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} w_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}). \quad (2.73)$$

Виконаємо перетворення з останнім рядом в формулі (2.73). Після них отримаємо

$$\begin{aligned} & \zeta_n^+ \vec{\nabla}(r_j^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} w_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} (2n-1)(2\nu-2) \left[\frac{2(k+1)-n(2k+1)}{(k+1)(2k+3)} \vec{V}_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{2k}{(n+k)(2k-1)} z_{12}^2 \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) + \frac{n}{k+1} r_{3-j}^2 \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) \right]. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Підставимо (2.74) у (2.73)

$$\begin{aligned} \vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \left[(\chi_n^+ - \zeta_n^+) \lambda_{n,k}^{(1)} - \frac{2k(2n-1)(2\nu-2)}{(n+k)(2k-1)} \right] z_{12}^2 \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \left[(\chi_n^+ - \zeta_n^+) \lambda_{n,k}^{(2)} - (2n-1)(2\nu-2) \frac{2(k+1)-n(2k+1)}{(k+1)(2k+3)} \right] \vec{V}_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} (2n-1)(2\nu-2) \frac{n}{k+1} r_{3-j}^2 \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Обчислимо коефіцієнти в рядах при базисних функціях

$$\begin{aligned} & (\chi_n^+ - \zeta_n^+) \lambda_{n,k}^{(1)} - \frac{2k(2n-1)(2\nu-2)}{(n+k)(2k-1)} = \\ &= (n+4\nu-4) \frac{2nk-n-k}{(n+k)(2k-1)} - \frac{2k(2n-1)(2\nu-2)}{(n+k)(2k-1)} = \frac{n(2nk-n-k-4\nu+4)}{(n+k)(2k-1)}, \quad (2.76) \\ & (\chi_n^+ - \zeta_n^+) \lambda_{n,k}^{(2)} - (2n-1)(2\nu-2) \frac{2(k+1)-n(2k+1)}{(k+1)(2k+3)} = \\ & (n+4\nu-4) \frac{2n-1}{2k+3} - (2n-1)(2\nu-2) \frac{2(k+1)-n(2k+1)}{(k+1)(2k+3)} = \\ &= \frac{n(2n-1)[(4\nu-3)k+2\nu-1]}{(k+1)(2k+3)}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Підставимо (2.76), (2.77) у (2.75)

$$\begin{aligned}
\vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} z_{12}^2 \frac{n(2nk - n - k - 4\nu + 4)}{(n+k)(2k-1)} \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) + \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \frac{n(2n-1)[(4\nu-3)k + 2\nu - 1]}{(k+1)(2k+3)} \vec{V}_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} (2n-1)(2\nu-2) \frac{n}{k+1} r_{3-j}^2 \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}). \tag{2.78}
\end{aligned}$$

Тепер скористаємось тотожністю

$$\begin{aligned}
& \frac{n(2n-1)[(4\nu-3)k + 2\nu - 1]}{(k+1)(2k+3)} \vec{V}_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) - (2n-1)(2\nu-2) \frac{n}{k+1} r_{3-j}^2 \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) = \\
& = - \frac{n(2n-1)}{(k+1)(2k+3)} \vec{W}_{2,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}).
\end{aligned}$$

В результаті розвинення (2.78) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \left[z_{12}^2 \frac{n(2nk - n - k - 4\nu + 4)}{(n+k)(2k-1)} \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) - \right. \\
& \left. - \frac{n(2n-1)}{(k+1)(2k+3)} \vec{W}_{2,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) \right],
\end{aligned}$$

що остаточно доводить теорему.

Наслідком теореми 2.3 є наступний результат.

Теорема 2.4. При виконанні умови $r_{3-j} < z_{12}$ правильною є формула

$$\vec{U}_n^+(r_j, \theta_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \left[-\alpha^\nu z_{12}^2 \lambda_{n,k}^{(3)} \vec{W}_{1,k}^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) + \vec{U}_k^-(r_{3-j}, \theta_{3-j}) \right], \tag{2.79}$$

де

$$\lambda_{n,k}^{(3)} = \frac{2nk - n - k}{(n+k)(2k-1)(2n-1)}. \tag{2.80}$$

Теорема безпосереднє випливає з формули (2.70).

2.5 Висновок розділу 2

Апарат узагальненого методу Фур'є отримав подальший розвиток. Побудовано нові вісесиметричні базисні розв'язки рівняння Ламе для внутрішності і зовнішності кулі та доведено їх базисність. На відміну від базисних розв'язків рівняння Ламе для кулі, введених у роботі [44] і використаних у багатьох подальших роботах того ж автора, розв'язки в дисертації не містять у собі параметрів сферичної поверхні. Для побудованих розв'язків отримано нові теореми додавання в однаково напрямлених сферичних системах координат, початки яких довільно зсунуті вздовж осі симетрії.

У другому розділі також побудовано базисні набори вісесиметричних термопружних розв'язків рівняння Дюамеля – Неймана для внутрішності і зовнішності кулі, які відповідають базисним вісесиметричним гармонічним і бігармонічним температурним полям. Для цих розв'язків також доведено теореми додавання в системах координат вказаних вище.

Для всіх побудованих розв'язків знайдені відповідні вектори напружень на сферичній поверхні на площинках, нормальми до яких є орти сферичної системи координат.

РОЗДІЛ 3

ЛОКАЛЬНА МОДЕЛЬ СТАЦІОНАРНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ В ПОРИСТОМУ МАТЕРІАЛІ В ОБЛАСТІ МІЖ ДВОМА СФЕРИЧНИМИ ПОРАМИ

3.1 Постановка задачі

Розглянемо локальну модель стаціонарного термопружного стану в пористому матеріалі в області між двома сферичними порами Ω_j ($j=1,2$), який визначається сталою температурою та відсутністю напружень на поверхнях пор. Центри пор знаходяться в точках O_j , а їх радіуси дорівнюють R_j . Уважаємо, що пори не перетинаються, тобто $|\overrightarrow{O_1O_2}| > R_1 + R_2$.

Уведемо однаково напрямлені декартові (x_j, y_j, z_j) і сферичні системи координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ з початками в точках O_j таким чином, щоб співвідношення між координатами задавалися формулами:

$$x_j = r_j \sin \theta_j \cos \varphi_j, \quad y_j = r_j \sin \theta_j \sin \varphi_j, \quad z_j = r_j \cos \theta_j, \quad (3.1)$$

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2 + z_{12}, \quad \overrightarrow{O_1O_2} = (0, 0, z_{12}), \quad z_{12} > 0. \quad (3.2)$$

Області Ω_j та їх границі $\partial\Omega_j$ ($j=1,2$) в локальних системах координат описуються так:

$$\Omega_j = \{r_j < R_j, \theta_j \in [0, \pi], \varphi_j \in [0, 2\pi]\}, \quad \partial\Omega_j = \{r_j = R_j, \theta_j \in [0, \pi], \varphi_j \in [0, 2\pi]\}.$$

Математична модель незв'язаних температурного поля і поля переміщень задається крайовими задачами:

$$\Delta T(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega; \quad T(\vec{x})|_{\vec{x} \in \partial\Omega_j} = T_j, \quad j=1,2; \quad (3.3)$$

$$\Delta \vec{U}(\vec{x}) + (1-2\nu)^{-1} \vec{\nabla}(\text{div} \vec{U}(\vec{x})) = \alpha_T \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \vec{\nabla} T(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega; \quad (3.4)$$

$$(\sigma_r)_{|\partial\Omega_j} = (\tau_{r\theta})_{|\partial\Omega_j} = 0, \quad j=1,2, \quad (3.5)$$

де $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$, $T(\vec{x})$ – температурне поле, $\vec{U}(\vec{x})$ – поле переміщень, α_T –

коефіцієнт лінійного теплового розширення, ν – коефіцієнт Пуассона, $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень, $\vec{\nabla} = \text{grad}$.

3.2 Побудова загального розв'язку задачі та її зведення до розв'язувальної системи

Крайову задачу (3.3) – (3.5) будемо розв'язувати послідовно, тобто спершу розв'яжемо задачу (3.3) для визначення температурного поля. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$T(\vec{x}) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} R_j^{n+1} w_n^+(r_j, \theta_j) \quad (3.6)$$

з невідомими коефіцієнтами $t_n^{(j)}$.

Користуючись формулою (2.66) розв'язок (3.6) можна записати в сферичній системі координат з початком у точці O_j ($j = 1, 2$)

$$T(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} \left(\frac{R_j}{r_j} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_j}{z_{12}} \right)^n P_n(\cos \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^{k+1} t_k^{(3-j)}, \quad (3.7)$$

Після виконання граничних умов (3.3) для визначення коефіцієнтів $t_n^{(j)}$ отримано розв'язувальну систему

$$t_n^{(j)} + \left(\frac{R_j}{z_{12}} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^{k+1} t_k^{(3-j)} = T_j \delta_{n0}, \quad n = 0 \div \infty, \quad j = 1, 2. \quad (3.8)$$

Теорема 3.1. За умови $z_{12} > R_1 + R_2$ оператор системи (3.8) є фредгольмовим оператором в просторі $l_2 \times l_2$.

Доведення. При виконанні умови теореми її твердження впливає зі збіжності ряду

$$\sum_{k,n=0}^{\infty} |h_{n,k}^{(j)}| \left(\frac{R_j}{z_{12}} \right)^n \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^{k+1} = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} \left(\frac{R_j}{z_{12}} \right)^n \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} \left(\frac{R_j}{z_{12}} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^{k+1} \left(1 - \frac{R_j}{z_{12}} \right)^{-k-1}$$

як геометричної прогресії зі знаменником

$$\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \left(1 - \frac{R_j}{z_{12}} \right)^{-1} < 1.$$

Як відомо, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.4) можна записати в такому вигляді:

$$\vec{U}(\vec{x}) = \vec{U}^G(\vec{x}) + \vec{U}^T(\vec{x}), \quad (3.9)$$

де $\vec{U}^G(\vec{x})$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $\vec{U}^T(\vec{x})$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (далі називається вектором термічних переміщень).

Загальний розв'язок рівняння Ламе будемо за допомогою базисних розв'язків (2.4), (2.5)

$$\vec{U}^G(\vec{x}) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(j)} R_j^{n+3} \vec{W}_{1,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(j)} R_j^{n+1} \vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j), \quad (3.10)$$

де $a_{1,n}^{(j)}, a_{2,n}^{(j)}$ – невідомі коефіцієнти.

Будемо вважати, що в області Ω задано стаціонарне температурне поле (3.6).

Користуючись принципом суперпозиції вектор термічних переміщень, який відповідає температурному полю (3.6), можна подати у вигляді

$$\vec{U}^T(\vec{x}) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} R_j^{n+1} \vec{U}_n^+(r_j, \theta_j), \quad (3.11)$$

де $\vec{U}_n^+(r_j, \theta_j)$ уведено в формулі (2.33).

Тепер загальний розв'язок крайової задачі (3.4), (3.5) при $\vec{x} \in \Omega$ має вигляд

$$\vec{U}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(j)} R_j^{n+3} \vec{W}_{1,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(j)} R_j^{n+1} \vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} R_j^{n+1} \vec{U}_n^+(r_j, \theta_j). \quad (3.12)$$

З використанням теорем додавання (2.68), (2.69), (2.79) вектор-функцію (3.12) запишемо у сферичній системі координат з початком у точці O_j ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
\vec{U}(r_j, \theta_j) = & \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(j)} R_j^{n+3} \vec{W}_{1,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(3-j)} R_{3-j}^{n+3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(3-j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} \vec{W}_{1,k}^-(r_j, \theta_j) + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(j)} R_j^{n+1} \vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(3-j)} R_{3-j}^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(3-j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} \left[Z_{12}^2 \gamma_{n,k}^{(1)} \vec{W}_{1,k}^-(r_j, \theta_j) - \gamma_{n,k}^{(2)} \vec{W}_{2,k}^-(r_j, \theta_j) \right] + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} R_j^{n+1} \vec{U}_n^+(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(3-j)} R_{3-j}^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(3-j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} \left[-\alpha^\nu Z_{12}^2 \lambda_{n,k}^{(3)} \vec{W}_{1,k}^-(r_j, \theta_j) + \vec{U}_k^-(r_j, \theta_j) \right].
\end{aligned}$$

Після заміни порядку підсумовування в подвійних сумах отримаємо

$$\begin{aligned}
\vec{U}(r_j, \theta_j) = & \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(j)} R_j^{n+3} \vec{W}_{1,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+3} a_{1,k}^{(3-j)} + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(j)} R_j^{n+1} \vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} \gamma_{k,n}^{(1)} R_{3-j}^{k+1} a_{2,k}^{(3-j)} - \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{2,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} \gamma_{k,n}^{(2)} R_{3-j}^{k+1} a_{2,k}^{(3-j)} + \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} R_j^{n+1} \vec{U}_n^+(r_j, \theta_j) + \\
& - \alpha^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} \lambda_{k,n}^{(3)} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)} + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{U}_n^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)}. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Перейдемо у переміщенні (3.13) до вектора напружень на поверхні $\partial\Omega_j$ згідно з формулами (2.39), (2.40), (2.44), (2.50)

$$\begin{aligned}
\frac{F_r \vec{U}(R_j, \theta_j)}{2G} = & \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(j)} (n+2) [(n+1) P_n(\cos \theta_j) \vec{e}_{r_j} - P_n^1(\cos \theta_j) \vec{e}_{\theta_j}] + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{n-2} (n-1) [n P_n(\cos \theta_j) \vec{e}_{r_j} + P_n^1(\cos \theta_j) \vec{e}_{\theta_j}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+3} a_{1,k}^{(3-j)} + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(j)} [n(n^2 + 3n - 2\nu) P_n(\cos \theta_j) \vec{e}_{r_j} - (n^2 + 2\nu - 2) P_n^1(\cos \theta_j) \vec{e}_{\theta_j}] + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{n-2} (n-1) [n P_n(\cos \theta_j) \vec{e}_{r_j} + P_n^1(\cos \theta_j) \vec{e}_{\theta_j}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} \gamma_{k,n}^{(1)} R_{3-j}^{k+1} a_{2,k}^{(3-j)} - \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} R_j^n [(n+1)(n^2 - n - 2\nu - 2) P_n(\cos \theta_j) \vec{e}_{r_j} + (n^2 + 2n + 2\nu - 1) P_n^1(\cos \theta_j) \vec{e}_{\theta_j}] \cdot \\
& \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{Z_{12}^{n+k+1}} \gamma_{k,n}^{(2)} R_{3-j}^{k+1} a_{2,k}^{(3-j)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha^\nu \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} \left[-\left(\frac{n(n-1)}{2n-1} + 2 \right) P_n(\cos \theta_j) \vec{e}_{r_j} + \frac{n}{2n-1} P_n^1(\cos \theta_j) \vec{e}_{\theta_j} \right] + \\
& -\alpha^\nu \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{n-2} (n-1) [n P_n(\cos \theta_j) \vec{e}_{r_j} + P_n^1(\cos \theta_j) \vec{e}_{\theta_j}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k-1}} \lambda_{k,n}^{(3)} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)} + \\
& +\alpha^\nu \sum_{n=0}^{\infty} R_j^n \left[\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} - 2 \right) P_n(\cos \theta_j) \vec{e}_{r_j} + \frac{n+1}{2n+3} P_n^1(\cos \theta_j) \vec{e}_{\theta_j} \right] \cdot \\
& \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)} . \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Після виконання граничних умов (3.5) приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_{1,n}^{(j)}, a_{2,n}^{(j)}$

$$\begin{aligned}
& (n+2)(n+1)a_{1,n}^{(j)} + n(n^2 + 3n - 2\nu)a_{2,n}^{(j)} + R_j^{n-2} (n-1)n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+3} a_{1,k}^{(3-j)} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \left[z_{12}^2 R_j^{n-2} (n-1)n \gamma_{k,n}^{(1)} - R_j^n (n+1)(n^2 - n - 2\nu - 2) \gamma_{k,n}^{(2)} \right] R_{3-j}^{k+1} a_{2,k}^{(3-j)} - \\
& -\alpha^\nu \left(\frac{n(n-1)}{2n-1} + 2 \right) t_n^{(j)} - \alpha^\nu R_j^{n-2} (n-1)n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k-1}} \lambda_{k,n}^{(3)} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)} + \\
& +\alpha^\nu R_j^n \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} - 2 \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)} = 0, \quad n=0 \div \infty, \quad j=1,2; \tag{3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(n+2)a_{1,n}^{(j)} - (n^2 + 2\nu - 2)a_{2,n}^{(j)} + R_j^{n-2} (n-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+3} a_{1,k}^{(3-j)} + \\
& + R_j^{n-2} (n-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k-1}} \gamma_{k,n}^{(1)} R_{3-j}^{k+1} a_{2,k}^{(3-j)} - \\
& - R_j^n (n^2 + 2n + 2\nu - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \gamma_{k,n}^{(2)} R_{3-j}^{k+1} a_{2,k}^{(3-j)} + \\
& +\alpha^\nu \frac{n}{2n-1} t_n^{(j)} - \alpha^\nu R_j^{n-2} (n-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k-1}} \lambda_{k,n}^{(3)} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)} + \\
& +\alpha^\nu R_j^n \frac{n+1}{2n+3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)} = 0, \quad n=0 \div \infty, \quad j=1,2. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Перетворимо систему до нормального вигляду, для якого оператор системи

складається з суми тотожного і цілком неперервного операторів

$$\begin{aligned}
 & a_{2,n}^{(j)} + \frac{(n-1)(2n+1)}{d_n^-} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \omega_{n-2,k+3}^{(j)} a_{1,k}^{(3-j)} + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \frac{(n-1)}{d_n^-} \left[(2n+1) \gamma_{k,n}^{(1)} \omega_{n-2,k+1}^{(j)} - (n+1)(2n+3) \gamma_{k,n}^{(2)} \omega_{n,k+1}^{(j)} \right] a_{2,k}^{(3-j)} = \\
 & = \alpha^\nu \frac{2(n-1)}{(2n-1)d_n^-} t_n^{(j)} + \alpha^\nu \frac{(n-1)(2n+1)}{d_n^-} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \lambda_{k,n}^{(3)} \omega_{n-2,k+1}^{(j)} t_k^{(3-j)} - \\
 & - \alpha^\nu \frac{(n-1)}{d_n^-} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \omega_{n,k+1}^{(j)} t_k^{(3-j)}, \quad n = 0 \div \infty, \quad j = 1, 2; \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{1,n}^{(j)} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{d_n^-} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \omega_{n-2,k+3}^{(j)} a_{1,k}^{(3-j)} + \frac{d_n^+}{(n+2)(2n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \gamma_{k,n}^{(2)} \omega_{n,k+1}^{(j)} a_{2,k}^{(3-j)} - \\
 & - \frac{(n-1)n(2n-1)}{(2n+1)d_n^-} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \left[(2n+1) \gamma_{k,n}^{(1)} \omega_{n-2,k+1}^{(j)} - (n+1)(2n+3) \gamma_{k,n}^{(2)} \omega_{n,k+1}^{(j)} \right] a_{2,k}^{(3-j)} = \\
 & = \alpha^\nu \left(\frac{1}{(2n+1)} - \frac{2(n-1)n}{(2n+1)d_n^-} \right) t_n^{(j)} - \alpha^\nu \frac{(n-1)n(2n-1)}{d_n^-} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \lambda_{k,n}^{(3)} \omega_{n-2,k+1}^{(j)} t_k^{(3-j)} + \\
 & + \alpha^\nu \left(\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{(2n+1)d_n^-} \right) \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}^{(j)} \omega_{n,k+1}^{(j)} t_k^{(3-j)}, \quad n = 0 \div \infty, \quad j = 1, 2. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

де

$$d_n^\pm = 2[n^2 + (1 \pm 2\nu)n + 1 \pm \nu], \quad \omega_{n,k}^{(j,3-j)} = \left(\frac{R_j}{z_{12}} \right)^n \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^k.$$

Теорема 3.2. За умови $z_{12} > R_1 + R_2$ оператор системи (3.17), (3.18) є фредгольмовим оператором у просторі l_2^4 .

Доведення теореми аналогічно доведенню теореми 3.1, тому тут не наводиться.

3.3 Чисельний експеримент

Для визначення напруженого стану в задачі необхідно чисельно розв'язати систему (3.17), (3.18). Оскільки оператор системи фредгольмів, для цього можна коректно застосувати метод редукції. Чисельний розв'язок системи

використовується для визначення деяких характерних напружень.

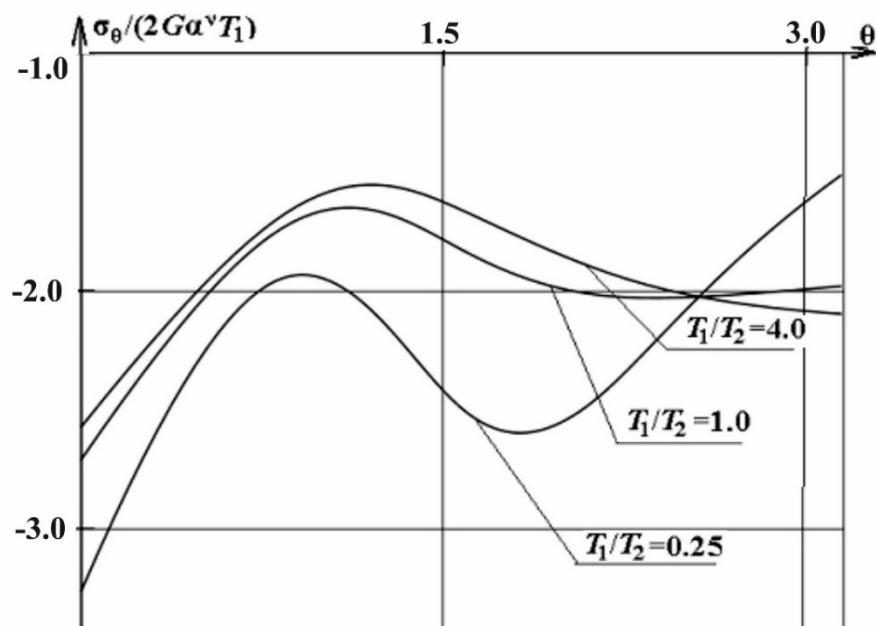


Рисунок 3.1 – Графіки напружень $\sigma_{\theta} / (2G\alpha^v T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ при $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.6$.

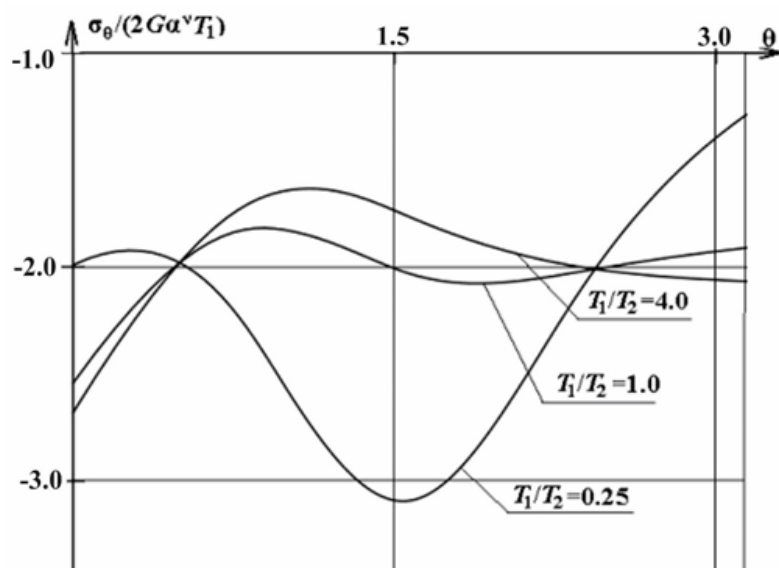


Рисунок 3.2 – Графіки напружень $\sigma_{\theta} / (2G\alpha^v T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ при $R_1 / z_{12} = 0.3$, $R_2 / z_{12} = 0.5$.

Графіки напружень $\sigma_{\theta} / (2G\alpha^v T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ в залежності

від відношення температур поверхонь порожнин ($T_1 / T_2 = 0.25; 1.0; 4.0$) наведено при: $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.6$ (рис. 3.1), $R_1 / z_{12} = 0.3$, $R_2 / z_{12} = 0.5$ (рис. 3.2), $R_1 / z_{12} = 0.4$, $R_2 / z_{12} = 0.4$ (рис. 3.3).

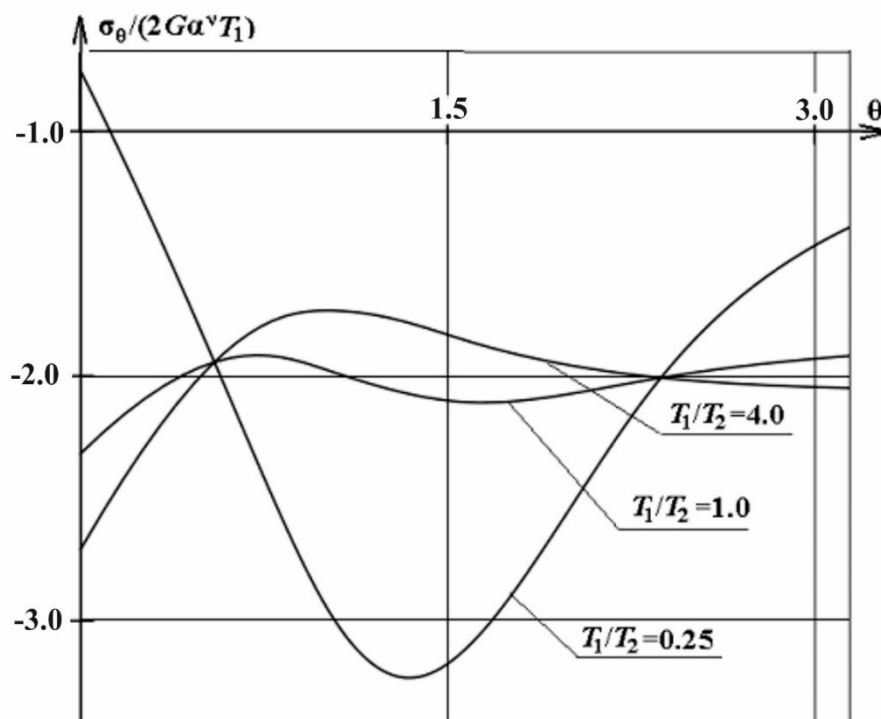


Рисунок 3.3 – Графіки напружень $\sigma_\theta / (2G\alpha^v T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ при $R_1 / z_{12} = 0.4$, $R_2 / z_{12} = 0.4$.

На рисунках 3.4 – 3.6 наведено графіки напружень $\sigma_\theta / (2G\alpha^v T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ в залежності від відносного розміру порожнин при відношенні температур: $T_1 / T_2 = 0.25$ (рис. 3.4), $T_1 / T_2 = 1.0$ (рис. 3.5), $T_1 / T_2 = 4.0$ (рис. 3.6).

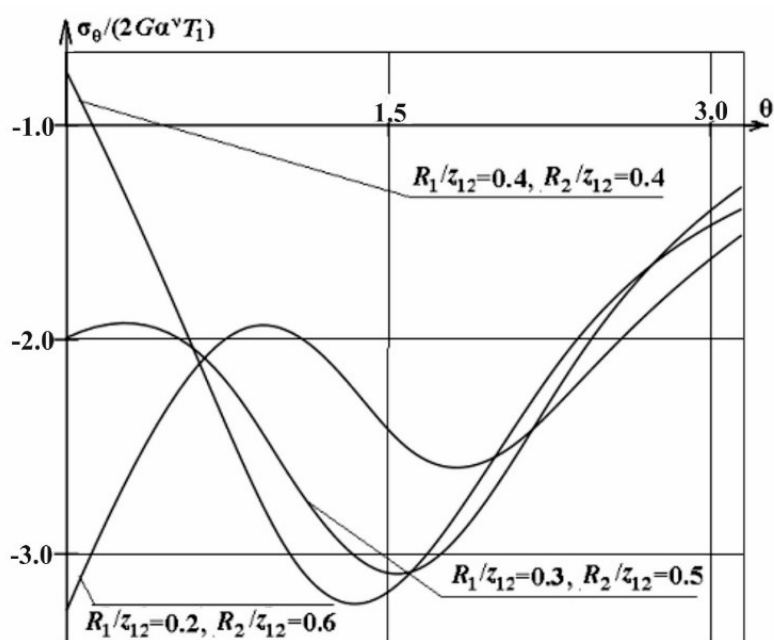


Рисунок 3.4 – Графіки напружень $\sigma_\theta / (2G\alpha^v T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ при відношенні температур $T_1 / T_2 = 0.25$

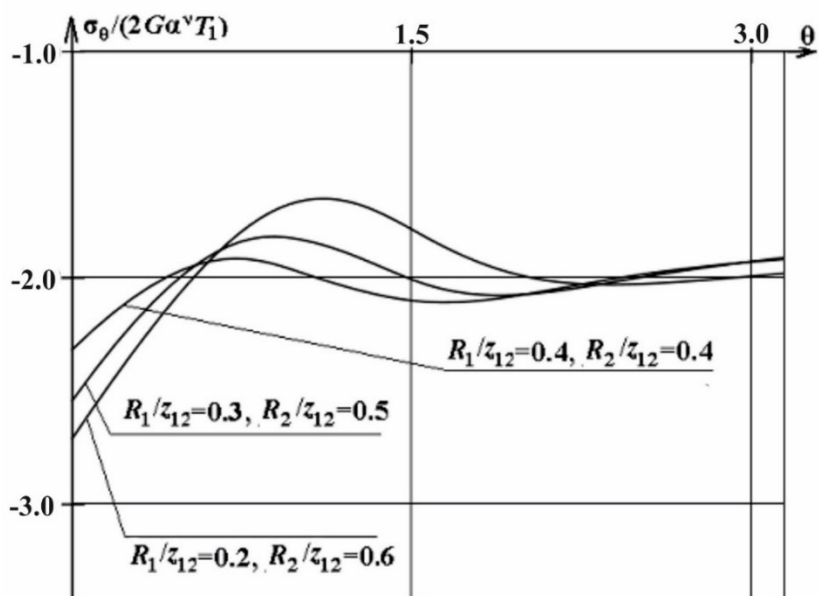


Рисунок 3.5 – Графіки напружень $\sigma_\theta / (2G\alpha^v T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ при відношенні температур $T_1 / T_2 = 1.0$

Графіки показують, що при великому відносному розмірі другої порожнини

найбільша концентрація стискаючих напружень спостерігається в околі верхнього полюсу першої порожнини в області найближчої до другої порожнини. При зменшенні відносного розміру другої порожнини і значенні $T_1 / T_2 = 0.25$ найбільші за модулем напруження зсуваються в екваторіальну область першої порожнини.

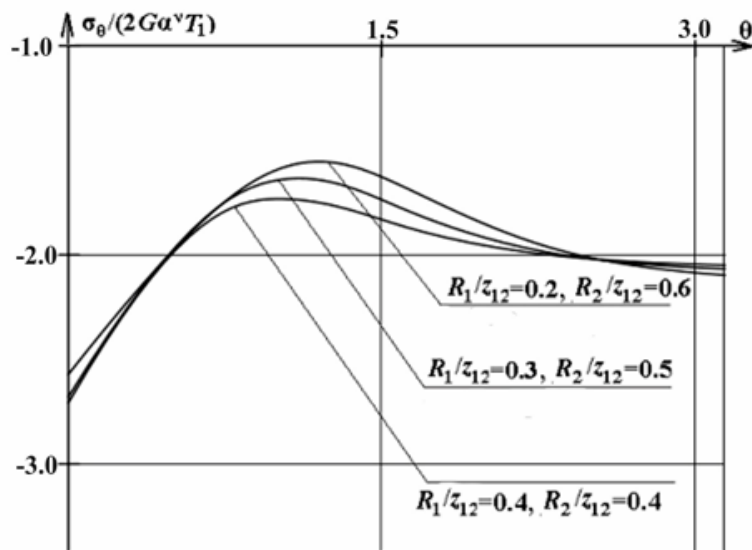


Рисунок 3.6 – Графіки напружень $\sigma_\theta / (2G\alpha^\nu T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ при відношенні температур $T_1 / T_2 = 4.0$

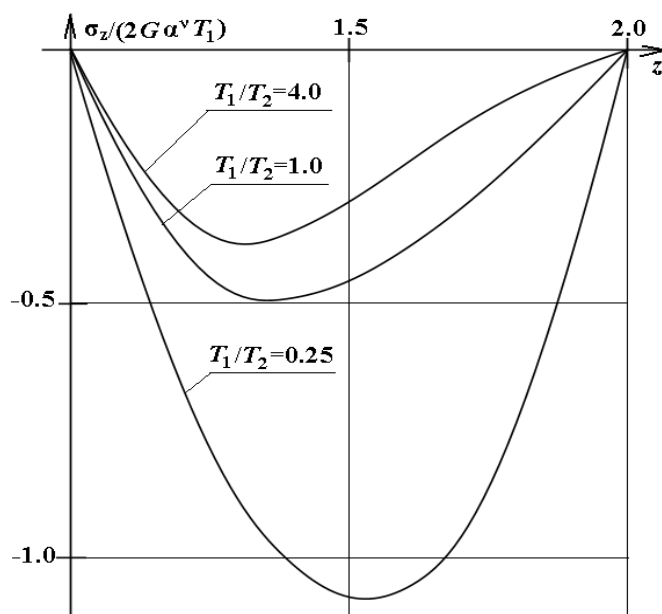


Рисунок 3.7 – Графіки напружень $\sigma_z / (2G\alpha^\nu T_1)$ на осі між порожнинами при $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.6$

На рисунку 3.7 зображено графіки напружень $\sigma_z / (2G\alpha^v T_1)$ на осі між порожнинами при різних температурах поверхонь і $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.6$. Вони показують, що в найближчих точках поверхонь порожнин (на осі симетрії) виконуються граничні умови крайової задачі.

Зауважимо, що наведені графіки узгоджуються з точним аналітичним розв'язком задачі для однієї порожнини, в якій

$$\sigma_\theta / (2G\alpha^v T_1) = -2.$$

У таблиці 3.1 показано практичну збіжність методу редукції на прикладі обчислення значень напружень $\sigma_\theta / (2G\alpha^v T_1)$ при $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.6$ і $T_1 / T_2 = 0.25$ в залежності від параметра індукції **nmax**. При параметрі редукції **nmax** = 20 (порядок розв'язувальної системи становить 84) точність обчислень складає 5 вірних значущих цифр.

Таблиця 3.1. Практична збіжність методу редукції за значеннями $\sigma_\theta / (2G\alpha^v T_1)$ на поверхні порожнини $r_1 = R_1$ при $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.6$, $T_1 / T_2 = 0.25$.

θ / \mathbf{nmax}	0	$\pi / 3$	$2\pi / 3$	π
10	3.27138	1.71151	2.62491	1.51581
20	3.26018	1.71283	2.62482	1.51578
30	3.26019	1.71283	2.62482	1.51578

3.4 Висновки до розділу 3.

В даному розділі побудовано локальну стаціонарну модель термонапруженого стан пористого матеріалу. Модель основана на незв'язаних крайових задачах для стаціонарних рівнянь теплопровідності і термопружності для простору з двома сферичними порожнинами. Температурне поле визначається сталою температурою на поверхнях порожнин, які вважаються вільними від

зусиль. Задачі розв'язувалися узагальненим методом Фур'є. Формалізм УМФ дав можливість звести крайові задачі до алгебраїчних розв'язувальних систем з фредгольмовими операторами в просторах l_2^2 і l_2^4 за умови неперетинання сферичних поверхонь. При чисельному розв'язанні систем використано метод редукції. Отримано графіки напружень σ_θ на поверхні однієї з порожнин і напружень σ_z на осі симетрії задачі між порожнинами при різних відносних розмірах порожнин та різних температурах їх нагріву. Отримані результати узгоджуються з відомими для однієї порожнини і опосередковано підтверджуються графіками з рисунку 3.7. Збіжність методу редукції перевірено чисельно.

РОЗДІЛ 4

ОСНОВНА ВІСЕСИМЕТРИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУЛІ ЗІ СФЕРИЧНОЮ НЕОДНОРІДІСТЮ

4.1 Постановка задачі

Розглянемо кулю з центром у точці O радіуса R_0 , яка має концентричне сферичне включення радіуса R_1 ($R_1 < R_0$) з іншого матеріалу. Введемо сферичну систему координат (r, θ, φ) , початок якої сумістимо з точкою O . Позначимо області $\Omega_0 = \{(r, \theta, \varphi) : R_1 < r < R_0\}$, $\Omega_1 = \{(r, \theta, \varphi) : r < R_1\}$. Будемо вважати, що матеріал частини кулі, яка займає область Ω_j має механічні характеристики (G_j, ν_j) ($j = 0 \div 1$), де G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона, на поверхні включення виконуються умови ідеального механічного контакту.

Розглянемо основну вісесиметричну крайову задачу в напруженнях для кусково однорідної кулі $\Omega_0 \cup \overline{\Omega_1}$, яка задається умовами:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{U}_j + \frac{1}{1-2\nu_j} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{U}_j) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega_j, \quad j = 0 \div 1; \quad (4.1)$$

$$(\vec{U}_0)_{|r=R_1} = (\vec{U}_1)_{|r=R_1}, \quad (F\vec{U}_0)_{|r=R_1} = (F\vec{U}_1)_{|r=R_1}; \quad (4.2)$$

$$(F\vec{U}_0)_{|r=R_0} = 2G_0 \sum_{n=0}^{\infty} [f_n^{(r)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + f_n^{(\theta)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta]. \quad (4.3)$$

Тут через \vec{U}_j ($j = 0 \div 1$) позначено поле переміщень в області Ω_j , $F\vec{U}_j$ – вектор напружень на поверхні $\Gamma_j = \{(r, \theta, \varphi) : r = R_j\}$ з нормаллю $\vec{n}_j = \vec{e}_r$, відповідний вектору переміщень \vec{U}_j , $\vec{\nabla}$ – оператор набла, $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$ – орти сферичної системи координат, \vec{x} – точка тривимірного простору, декартові координати якої зв'язані з сферичними координатами (r, θ, φ) .

4.2 Розв'язання пружної задачі

Розв'яжемо крайову задачу (4.1) – (4.3) звичайним методом Фур'є. Завдяки базисності розв'язків (2.14), (2.5) в областях Ω^\pm загальний розв'язок $\vec{U}_j(\vec{x})$ рівняння (4.1) в області Ω_j ($j = 0 \div 1$) можна записати так:

$$\begin{aligned} \vec{U}_0(\vec{x}) = & \sum_{n=0}^{\infty} [a_{1,n}^{(0)} R_0^{-n+2} \vec{W}_{1,n}^-(r, \theta) + a_{2,n}^{(0)} R_0^{-n} \vec{W}_{2,n}^-(r, \theta)] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{1,n}^{(1)} R_1^{n+3} \vec{W}_{1,n}^+(r, \theta) + a_{2,n}^{(1)} R_1^{n+1} \vec{W}_{2,n}^+(r, \theta)], \quad \vec{x} \in \Omega_0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\vec{U}_1(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_{1,n} R_1^{-n+2} \vec{W}_{1,n}^-(r, \theta) + b_{2,n} R_1^{-n} \vec{W}_{2,n}^-(r, \theta)], \quad \vec{x} \in \Omega_1. \quad (4.5)$$

Тут $\{a_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i=1}^{\infty,2}$, $j = 0,1$; $\{b_{i,n}\}_{n=0,i=1}^{\infty,2}$ – невідомі коефіцієнти.

Скористаємось формулами (2.12) – (2.15), (2.39), (2.40), (2.44) для подання векторів $\vec{U}_j(\vec{x})$ і $F\vec{U}_j(\vec{x})$ у вигляді розвинення за сферичним базисом

$$\begin{aligned} \vec{U}_0(\vec{x}) = & \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(0)} \frac{r^{n-1}}{R_0^{n-2}} [nP_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(0)} \frac{r^{n+1}}{R_0^n} [\beta_{1,n}^{-(0)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \beta_{2,n}^{-(0)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(1)} \frac{R_1^{n+3}}{r^{n+2}} [-(n+1)P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(1)} \frac{R_1^{n+1}}{r^n} [\beta_{1,n}^{+(0)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \beta_{2,n}^{+(0)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta], \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_1(\vec{x}) = & \sum_{n=0}^{\infty} b_{1,n} \frac{r^{n-1}}{R_1^{n-2}} [nP_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2,n} \frac{r^{n+1}}{R_1^n} [\beta_{1,n}^{-(1)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \beta_{2,n}^{-(1)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta], \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$F\vec{U}_0 = 2G_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(0)} \frac{r^{n-2}}{R_0^{n-2}} (n-1) [nP_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] +$$

$$\begin{aligned}
& +2G_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(0)} \frac{r^n}{R_0^n} [\rho_{1,n}^{-(0)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \rho_{2,n}^{-(0)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \\
& +2G_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(1)} \frac{R_1^{n+3}}{r^{n+3}} (n+2) [(n+1) P_n(\cos \theta) \vec{e}_r - P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \\
& +2G_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(1)} \frac{R_1^{n+1}}{r^{n+1}} [\rho_{1,n}^{+(0)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \rho_{2,n}^{+(0)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta], \tag{4.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F\vec{U}_1 &= 2G_1 \sum_{n=0}^{\infty} b_{1,n} \frac{r^{n-2}}{R_1^{n-2}} (n-1) [nP_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \\
& +2G_1 \sum_{n=0}^{\infty} b_{2,n} \frac{r^n}{R_1^n} [\rho_{1,n}^{-(1)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \rho_{2,n}^{-(1)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta], \tag{4.9}
\end{aligned}$$

де

$$\beta_{1,n}^{+(j)} = -n(n+3-4\nu_j), \quad \beta_{2,n}^{+(j)} = n+4\nu_j-4, \tag{4.10}$$

$$\beta_{1,n}^{-(j)} = (n+1)(n+4\nu_j-2), \quad \beta_{2,n}^{-(j)} = n-4\nu_j+5, \tag{4.11}$$

$$\rho_{1,n}^{+(j)} = n(n^2+3n-2\nu_j), \quad \rho_{2,n}^{+(j)} = -(n^2+2\nu_j-2), \tag{4.12}$$

$$\rho_{1,n}^{-(j)} = (n+1)(n^2-n-2\nu_j-2), \quad \rho_{2,n}^{-(j)} = n^2+2n+2\nu_j-1. \tag{4.13}$$

Підставимо формули (4.6) – (4.9) в умови спряження (4.2) і граничну умову (4.3). Після прирівнювання коефіцієнтів при відповідних функціях Лежандра приходимо до алгебраїчної системи відносно невідомих $\{a_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i=1}^{\infty,2}$, $j=0,1$; $\{b_{i,n}\}_{n=0,i=1}^{\infty,2}$

$$\begin{aligned}
n \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + (n+1)(n+4\nu_0-2) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)} - (n+1)a_{1,n}^{(1)} - n(n+3-4\nu_0)a_{2,n}^{(1)} = \\
= nb_{1,n} + (n+1)(n+4\nu_1-2)b_{2,n}, \tag{4.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + (n-4\nu_0+5) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)} + a_{1,n}^{(1)} + (n+4\nu_0-4)a_{2,n}^{(1)} = \\
= b_{1,n} + (n-4\nu_1+5)b_{2,n}, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

$$(n+1)(n+2)a_{1,n}^{(1)} + n(n^2+3n-2\nu_0)a_{2,n}^{(1)} +$$

$$\begin{aligned}
& +n(n-1)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + (n+1)(n^2 - n - 2\nu_0 - 2)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^n a_{2,n}^{(0)} = \\
& = \frac{G_1}{G_0} [n(n-1)b_{1,n} + (n+1)(n^2 - n - 2\nu_1 - 2)b_{2,n}], \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(n+2)a_{1,n}^{(1)} - (n^2 + 2\nu_0 - 2)a_{2,n}^{(1)} + \\
& + (n-1)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + (n^2 + 2n + 2\nu_0 - 1)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^n a_{2,n}^{(0)} = \\
& = \frac{G_1}{G_0} [(n-1)b_{1,n} + (n^2 + 2n + 2\nu_1 - 1)b_{2,n}], \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n(n-1)a_{1,n}^{(0)} + (n+1)(n^2 - n - 2\nu_0 - 2)a_{2,n}^{(0)} + (n+1)(n+2)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+3} a_{1,n}^{(1)} + \\
& + n(n^2 + 3n - 2\nu_0)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+1} a_{2,n}^{(1)} = f_n^{(r)}, \tag{4.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n-1)a_{1,n}^{(0)} + (n^2 + 2n + 2\nu_0 - 1)a_{2,n}^{(0)} - (n+2)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+3} a_{1,n}^{(1)} - \\
& - (n^2 + 2\nu_0 - 2)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+1} a_{2,n}^{(1)} = f_n^{(\theta)}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

З перших двох рівнянь отриманої системи знаходимо $b_{1,n}, b_{2,n}$

$$\begin{aligned}
b_{1,n} = & \left[1 - \frac{(2n+1)}{\Delta_n^{-(1)}} \beta_{2,n}^{-(1)} \right] a_{1,n}^{(1)} + \left[\beta_{2,n}^{+(0)} - \frac{n(2n-1)}{\Delta_n^{-(1)}} \beta_{2,n}^{-(1)} \right] a_{2,n}^{(1)} + \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + \\
& + \left[\beta_{2,n}^{-(0)} - \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} \beta_{2,n}^{-(1)} \right] \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)}, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

$$b_{2,n} = \frac{(2n+1)}{\Delta_n^{-(1)}} a_{1,n}^{(1)} + \frac{n(2n-1)}{\Delta_n^{-(1)}} a_{2,n}^{(1)} + \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)}, \tag{4.21}$$

де

$$\Delta_n^{-(j)} = 2[(3 - 4\nu_j)n + 1 - 2\nu_j]. \tag{4.22}$$

Рівняння (4.16), (4.17) перетворимо таким чином: спершу друге рівняння помножимо на $n + 1$ і додаємо до першого, потім друге рівняння помножимо на $-n$ і додаємо до першого

$$\begin{aligned} & 2[n^2 + (1 - 2\nu_0)n + 1 - \nu_0]a_{2,n}^{(1)} + \\ & + (n - 1)(2n + 1)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + (n + 1)(n - 1)(2n + 3)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^n a_{2,n}^{(0)} = \\ & = \frac{G_1}{G_0}(n - 1)[(2n + 1)b_{1,n} + (n + 1)(2n + 3)b_{2,n}], \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & (2n + 1)(n + 2)a_{1,n}^{(1)} + n(n + 2)(2n - 1)a_{2,n}^{(1)} - 2[n^2 + (1 + 2\nu_0)n + 1 + \nu_0]\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^n a_{2,n}^{(0)} = \\ & = -2\frac{G_1}{G_0}[n^2 + (1 + 2\nu_1)n + 1 + \nu_1]b_{2,n}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Лінійну комбінацію коефіцієнтів $b_{1,n}, b_{2,n}$ з правої частини рівності (4.23) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} & (2n + 1)b_{1,n} + (n + 1)(2n + 3)b_{2,n} = (2n + 1)\left[1 + \frac{(n + 1)(2n + 3) - (2n + 1)\beta_{2,n}^{-(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\right]a_{1,n}^{(1)} + \\ & + \left[(2n + 1)\beta_{2,n}^{+(0)} + n(2n - 1)\frac{(n + 1)(2n + 3) - (2n + 1)\beta_{2,n}^{-(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\right]a_{2,n}^{(1)} + (2n + 1)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + \\ & + \left[(2n + 1)\beta_{2,n}^{-(0)} + \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}}[(n + 1)(2n + 3) - (2n + 1)\beta_{2,n}^{-(1)}]\right]\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^n a_{2,n}^{(0)}. \end{aligned}$$

Після обчислення коефіцієнтів при $a_{1,n}^{(1)}, a_{2,n}^{(1)}, a_{2,n}^{(0)}$ отримаємо

$$\begin{aligned} & (2n + 1)b_{1,n} + (n + 1)(2n + 3)b_{2,n} = \\ & = -2[(3 - 4\nu_0)n + 2 - 2\nu_0]a_{2,n}^{(1)} + (2n + 1)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + (n + 1)(2n + 3)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^n a_{2,n}^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Користуючись формулами (4.21), (4.25) виключимо невідомі $b_{1,n}, b_{2,n}$ з рівнянь (4.23), (4.24). В результаті маємо

$$\left\{ 2[n^2 + (1 - 2\nu_0)n + 1 - \nu_0] + 2\frac{G_1}{G_0}(n-1)[(3 - 4\nu_0)n + 2 - 2\nu_0] \right\} a_{2,n}^{(1)} +$$

$$+ \left(1 - \frac{G_1}{G_0} \right) (n-1)(2n+1) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + \left(1 - \frac{G_1}{G_0} \right) (n-1)(n+1)(2n+3) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)} = 0, \quad (4.26)$$

$$\left[n + 2 + 2\frac{G_1}{G_0} \frac{[n^2 + (1 + 2\nu_1)n + 1 + \nu_1]}{\Delta_n^{-(1)}} \right] \left[(2n+1)a_{1,n}^{(1)} + n(2n-1)a_{2,n}^{(1)} \right] +$$

$$+ \left[2\frac{G_1}{G_0} [n^2 + (1 + 2\nu_1)n + 1 + \nu_1] \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} - 2[n^2 + (1 + 2\nu_0)n + 1 + \nu_0] \right] \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)} = 0. \quad (4.27)$$

Рівняння (4.18), (4.19) перетворимо як і вище, тобто спершу друге рівняння помножимо на $n+1$ і додаємо до першого, потім друге рівняння помножимо на $-n$ і додаємо до першого

$$(n-1)(2n+1)a_{1,n}^{(0)} + (n-1)(n+1)(2n+3)a_{2,n}^{(0)} +$$

$$+ 2[n^2 + (1 - 2\nu_0)n + 1 - \nu_0] \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n+1} a_{2,n}^{(1)} = f_n^{(r)} + (n+1)f_n^{(\theta)}, \quad (4.28)$$

$$- 2[n^2 + (1 + 2\nu_0)n + 1 + \nu_0] a_{2,n}^{(0)} + (n+2)(2n+1) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n+3} a_{1,n}^{(1)} +$$

$$+ n(n+2)(2n-1) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n+1} a_{2,n}^{(1)} = f_n^{(r)} - n f_n^{(\theta)}. \quad (4.29)$$

Запишемо визначник розв'язувальної лінійної алгебраїчної системи (4.26) – (4.29) відносно невідомих $a_{1,n}^{(1)}, a_{2,n}^{(1)}, a_{1,n}^{(0)}, a_{2,n}^{(0)}$ (порядок рядків визначника задається з останнього рівняння до першого)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (n+2)(2n+1)\rho^{n+3} & n(n+2)(2n-1)\rho^{n+1} & 0 & -d_n^{+(0)} \\ 0 & d_n^{-(0)}\rho^{n+1} & \alpha_n & \beta_n \\ (2n+1)\Delta_n^{(3)} & n(2n-1)\Delta_n^{(3)} & 0 & \Delta_n^{(4)}\rho^n \\ 0 & \Delta_n^{(2)} & (1-G_{10})\alpha_n\rho^{n-2} & (1-G_{10})\beta_n\rho^n \end{vmatrix}, \quad (4.30)$$

$$d_n^{\pm(j)} = 2[n^2 + (1 \pm 2\nu_j)n + 1 \pm \nu_j], \quad \rho = \frac{R_1}{R_0}, \quad G_{10} = \frac{G_1}{G_0}, \quad (4.31)$$

$$\Delta_n^{(2)} = d_n^{-(0)} + 2G_{10}(n-1)[(3-4\nu_0)n+2-2\nu_0], \quad (4.32)$$

$$\Delta_n^{(3)} = n+2 + G_{10} \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}, \quad \Delta_n^{(4)} = G_{10} \frac{\Delta_n^{-(0)} d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} - d_n^{+(0)}, \quad (4.33)$$

$$\alpha_n = (n-1)(2n+1), \quad \beta_n = (n-1)(n+1)(2n+3). \quad (4.34)$$

Розкриємо визначник (4.30) і запишемо його по степенях змінної G_{10}

$$\Delta_n = I_n^{(0)} + I_n^{(1)}G_{10} + I_n^{(2)}G_{10}^2, \quad (4.35)$$

де

$$\begin{aligned} I_n^{(0)} = & -\alpha_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\beta_n \rho^{2n+3} - \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{-(0)}d_n^{+(0)}\rho^{2n+3} + \\ & + \alpha_n\beta_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\rho^{2n+1} + \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)} + \\ & + \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\rho^{4n+2} + \alpha_n n(2n-1)(n+2)^2(2n+1)\beta_n \rho^{2n+1} - \\ & - \alpha_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\beta_n \rho^{2n-1} - \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\rho^{2n-1}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} = & \alpha_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\beta_n \rho^{2n+3} - \alpha_n n(n+2)(2n-1)(2n+1)\beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n+3} + \\ & + \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{-(0)} \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} d_n^{+(1)} \rho^{2n+3} - \alpha_n(n+2)(2n+1)(n-1)(\Delta_n^{-(0)}+2)d_n^{+(0)} \rho^{2n+3} - \\ & - \alpha_n\beta_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\rho^{2n+1} + \alpha_n\beta_n n(n+2)(2n-1)(2n+1) \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n+1} + \\ & + \alpha_n(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)} \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} + \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}(n-1)(\Delta_n^{-(0)}+2) - \\ & - \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\rho^{4n+2} - \alpha_n(n+2)(2n+1) \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} d_n^{+(1)}d_n^{-(0)}\rho^{4n+2} - \\ & - \alpha_n n(2n-1)(n+2)^2(2n+1)\beta_n \rho^{2n+1} + \alpha_n n(2n-1)(n+2)(2n+1)\beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n+1} - \\ & + \alpha_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\beta_n \rho^{2n-1} - \alpha_n n(n+2)(2n-1)(2n+1)\beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n-1} + \\ & + \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\rho^{2n-1} - \alpha_n(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)} \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n-1}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
I_n^{(2)} &= \alpha_n n(n+2)(2n-1)(2n+1) \beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n+3} + \\
&+ \alpha_n (n-1)(n+2)(2n+1) (\Delta_n^{-(0)} + 2) \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} d_n^{+(1)} \rho^{2n+3} - \\
&- \alpha_n \beta_n n(n+2)(2n-1)(2n+1) \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n+1} + \alpha_n (n-1)(2n+1) d_n^{+(0)} (\Delta_n^{-(0)} + 2) \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} + \\
&+ \alpha_n (n+2)(2n+1) \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} d_n^{+(1)} d_n^{-(0)} \rho^{4n+2} - \alpha_n n(2n-1)(n+2)(2n+1) \beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n+1} + \\
&+ \alpha_n n(n+2)(2n-1)(2n+1) \beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n-1} + \alpha_n (2n+1) d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n-1}. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Теорема 4.1. Багатопараметричний визначник Δ_n (4.30) для всіх значень параметрів $G_i > 0, \nu_i \in (0; 0,5)$ ($i=1,2$), $\rho \in (0,1)$ і довільного натурального $n \geq 2$ є додатним. Більш того, виконується нерівність

$$\Delta_n > \frac{4}{9} G_{10}^2 (n-1)^2 (n+1)^3 (2n+1)^2 (3n+2). \quad (4.39)$$

Для доведення теореми попередньо доведемо нову класичну нерівність.

Лема 4.1. При $\rho \in [0,1]$ і довільному натуральному n виконується класична нерівність

$$4(1 - \rho^{2n-1} - \rho^{2n+3} + \rho^{4n+2}) \geq (2n-1)(2n+3)(\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}). \quad (4.40)$$

Доведення. Розкладемо на множники вираз

$$\begin{aligned}
&4(1 - \rho^{2n-1} - \rho^{2n+3} + \rho^{4n+2}) - (2n-1)(2n+3)(\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}) = \\
&4(1 - \rho^{2n-1})(1 - \rho^{2n+3}) - (2n-1)(2n+3)\rho^{2n-1}(1 - \rho^2)^2 = \\
&= (1 - \rho)^2 \left[4 \sum_{i=0}^{2n-2} \rho^i \sum_{k=0}^{2k+2} \rho^k - (2n-1)(2n+3)\rho^{2n-1}(1 + \rho)^2 \right].
\end{aligned}$$

Доведемо, що вираз у квадратних дужках є невід'ємним. Оскільки $(1 + \rho)^2 \leq 2(1 + \rho^2)$, то фактично достатньо довести нерівність

$$2 \sum_{i=0}^{2n-2} \rho^i \sum_{k=0}^{2k+2} \rho^k - (2n-1)(2n+3)\rho^{2n-1}(1 + \rho^2) \geq 0. \quad (4.41)$$

Шляхом заміни індексів підсумовування в добутку рядів його можна зобразити у вигляді

$$\sum_{i=0}^{2n-2} \rho^i \sum_{k=0}^{2k+2} \rho^k = \sum_{m=0}^{2n-2} (m+1) \rho^m + (2n-1) \sum_{m=2n-1}^{2n+2} \rho^m + \sum_{m=2n+3}^{4n} (4n+1-m) \rho^m. \quad (4.42)$$

Виконаємо тотожне перетворення виразу, який входить у ліву частину нерівності (4.41)

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=0}^{2n-2} \rho^i \sum_{k=0}^{2k+2} \rho^k - (2n-1)(2n+3) \rho^{2n-1} (1 + \rho^2) = \\ & = \sum_{m=1}^{2n-2} m(m+1) (\rho^{m-1} - \rho^m) + 2n(2n-1) (\rho^{2n-2} - \rho^{2n-1}) - (2n-1) (\rho^{2n-1} - \rho^{2n}) + \\ & + (2n-1) (\rho^{2n} - \rho^{2n+1}) - 2n(2n-1) ((\rho^{2n+1} - \rho^{2n+2}) - \sum_{m=1}^{2n-2} m(m+1) (\rho^{4n-m} - \rho^{4n-m+1})) = \\ & = \sum_{m=1}^{2n-2} m(m+1) [\rho^{m-1} (1 - \rho) - \rho^{4n-m} (1 - \rho)] + 2n(2n-1) [\rho^{2n-2} (1 - \rho) - \rho^{2n+1} (1 - \rho)] - \\ & - (2n-1) [\rho^{2n-1} (1 - \rho) - \rho^{2n} (1 - \rho)]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Усі вирази у квадратних дужках у (4.43) є невід'ємними при $\rho \in [0,1]$. Крім того,

$$[\rho^{2n-2} (1 - \rho) - \rho^{2n+1} (1 - \rho)] \geq [\rho^{2n-1} (1 - \rho) - \rho^{2n} (1 - \rho)].$$

Отже, виконується нерівність

$$2 \sum_{i=0}^{2n-2} \rho^i \sum_{k=0}^{2k+2} \rho^k - (2n-1)(2n+3) \rho^{2n-1} (1 + \rho^2) \geq 0, \quad (4.44)$$

а з нею і лема.

Доведення теореми. Доведемо, що всі коефіцієнти $I_n^{(i)}$ ($i = 0 \div 2$) у формулі (4.35) є додатними при довільних значеннях параметрів указаних в умовах теореми.

Перетворимо $I_n^{(0)}$ до такого вигляду

$$\begin{aligned} I_n^{(0)} &= \alpha_n (n+2)(2n+1) [d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} (1 - \rho^{2n-1} - \rho^{2n+3} + \rho^{4n+2}) - \\ & - n(n+2)(2n-1) \beta_n (\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3})]. \end{aligned}$$

Користуючись результатом леми, можна оцінити

$$I_n^{(0)} \geq \alpha_n (n+2)(2n-1)(2n+1)(2n+3) \left[\frac{1}{4} d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} - n(n+2)(n-1)(n+1) \right] \rho^{2n-1} (1-\rho^2)^2.$$

Вираз у квадратних дужках можна подати так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} - n(n+2)(n-1)(n+1) &= [n^2 + (1+2\nu_0)n + 1 + \nu_0][n^2 + (1-2\nu_0)n + 1 - \nu_0] - \\ &\quad -(n^2 + 2n)(n^2 - 1). \end{aligned}$$

Найменше значення попередній вираз, як функція параметра ν_0 , приймає при значенні $\nu_0 = 1/2$ і воно дорівнює

$$3n^2 + 3n + \frac{3}{4}.$$

Таким чином,

$$I_n^{(0)} \geq \alpha_n (n+2)(2n-1)(2n+1)(2n+3) \left(3n^2 + 3n + \frac{3}{4} \right) \rho^{2n-1} (1-\rho^2)^2. \quad (4.45)$$

Крім того доведено нерівність

$$\begin{aligned} &\left[d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} (1 - \rho^{2n-1} - \rho^{2n+3} + \rho^{4n+2}) - n(n+2)(2n-1)\beta_n (\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}) \right] \geq \\ &\geq (2n-1)(2n+3) \left(3n^2 + 3n + \frac{3}{4} \right) \rho^{2n-1} (1-\rho^2)^2. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Тепер перетворимо коефіцієнт $I_n^{(1)}$

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \alpha_n (2n+1) \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \left[d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} (1 - \rho^{2n-1} - \rho^{2n-3} + \rho^{4n+2}) - \right. \\ &\quad \left. - n(n+2)(2n-1)\beta_n (\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}) \right] + \alpha_n (2n+1) \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} (\rho^{2n-3} - \rho^{4n+2}) + \\ &\quad + \alpha_n (2n+1) \left[(n-1)(n+2) d_n^{+(0)} (\Delta_n^{-(0)} + 2) (1 - \rho^{2n+3}) + (n+2) d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} (\rho^{2n-1} - \rho^{4n+2}) + \right. \\ &\quad \left. + n(n+2)^2 (2n-1)\beta_n (\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}) + (n+2) \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} d_n^{+(1)} d_n^{-(0)} (\rho^{2n+3} - \rho^{4n+2}) \right]. \end{aligned}$$

Завдяки нерівності (4.46) всі доданки попередньої формули є додатними.

Тепер остаточний результат теореми впливає з виразу коефіцієнта $I_n^{(2)}$, в якому всі доданки є додатними, причому

$$\begin{aligned}
I_n^{(2)} &> \alpha_n (2n+1)(n-1)d_n^{+(0)}(\Delta_n^{-(0)} + 2)] \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} > \\
&> \frac{4}{9}(n-1)^2(n+1)^3(2n+1)^2(3n+2).
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Теорема 4.1 дає можливість обґрунтовано побудувати точний розв'язок задачі (4.1) – (4.3).

Теорема 4.2. Якщо збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|f_n^{(r)}| + n|f_n^{(\theta)}|), \tag{4.48}$$

а зовнішнє навантаження

$$\vec{f}(\theta) = 2G_0 \sum_{n=0}^{\infty} [f_n^{(r)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + f_n^{(\theta)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta],$$

що діє на поверхню Γ_0 кулі $\Omega_0 \cup \overline{\Omega_1}$, зрівноважено

$$\oint_{\Gamma_0} (\vec{f}(\theta), \vec{e}_z) dS = 0, \tag{4.49}$$

то існує єдиний з точністю до вектора жорсткого зміщення розв'язок задачі (4.1) – (4.3), який має вигляд

$$\vec{U}(r, \theta) = \begin{cases} \vec{U}_0(r, \theta), & R_1 < r < R_0, \\ \vec{U}_1(r, \theta), & 0 \leq r < R_1 \end{cases} \tag{4.50}$$

і належить простору $C^2(\Omega_0 \cup \Omega_1) \cap C^1(\Omega_0 \cup \overline{\Omega_1}) \cap C(\overline{\Omega_0 \cup \Omega_1})$. Вектор-функції \vec{U}_0, \vec{U}_1 задано формулами (4.4), (4.5).

Доведення. Проведемо аналіз розв'язувальної системи рівнянь окремо при $n=0$, $n=1$ і $n \geq 2$.

При $n=0$ немає рівнянь після прирівнювання коефіцієнтів при $P_0^1 \equiv 0$, отже, маємо тільки три рівняння

$$-a_{1,0}^{(1)} + (4\nu_0 - 2)a_{2,0}^{(0)} = (4\nu_1 - 2)b_{2,0}, \tag{4.51}$$

$$2a_{1,0}^{(1)} - (2 + 2\nu_0)a_{2,0}^{(0)} = -G_{10}(2 + 2\nu_1)b_{2,0}, \tag{4.52}$$

$$-(2 + 2\nu_0)a_{2,0}^{(0)} + 2\rho^3 a_{1,0}^{(1)} = f_0^{(r)}. \tag{4.53}$$

З першого рівняння знайдемо $b_{2,0}$

$$b_{2,0} = \frac{1}{2-4\nu_1} a_{1,0}^{(1)} + \frac{2-4\nu_0}{2-4\nu_1} a_{2,0}^{(0)}$$

і підставимо його в два інші

$$\left(1 + G_{10} \frac{1+\nu_1}{2-4\nu_1}\right) a_{1,0}^{(1)} - \left(1 + \nu_0 - G_{10}(1+\nu_1) \frac{2-4\nu_0}{2-4\nu_1}\right) a_{2,0}^{(0)} = 0,$$

$$\rho^3 a_{1,0}^{(1)} - (1+\nu_0) a_{2,0}^{(0)} = \frac{f_0^{(r)}}{2}.$$

З останнього рівняння

$$a_{1,0}^{(1)} = (1+\nu_0) \rho^{-3} a_{2,0}^{(0)} + \rho^{-3} \frac{f_0^{(r)}}{2}$$

і підставимо в перше

$$\left[(1+\nu_0)(1-\rho^3) + \frac{1+\nu_1}{2-4\nu_1} G_{10}[1+\nu_0 + (2-4\nu_0)\rho^3]\right] a_{2,0}^{(0)} = -\left(1 + G_{10} \frac{1+\nu_1}{2-4\nu_1}\right) \frac{f_0^{(r)}}{2}.$$

Позначимо

$$\bar{\Delta}_0 = (1+\nu_0)(1-\rho^3) + \frac{1+\nu_1}{2-4\nu_1} G_{10}[1+\nu_0 + (2-4\nu_0)\rho^3].$$

Очевидно, $\bar{\Delta}_0 > 0$ і система має єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} a_{2,0}^{(0)} &= -\left(1 + G_{10} \frac{1+\nu_1}{2-4\nu_1}\right) \frac{f_0^{(r)}}{2\bar{\Delta}_0}, \quad a_{1,0}^{(1)} = -(1+\nu_0) \left(1 + G_{10} \frac{1+\nu_1}{2-4\nu_1}\right) \frac{f_0^{(r)}}{2\bar{\Delta}_0} \rho^{-3} + \frac{f_0^{(r)}}{2} \rho^{-3}, \\ b_{2,0} &= \frac{1}{2-4\nu_1} \left[-(1+\nu_0) \left(1 + G_{10} \frac{1+\nu_1}{2-4\nu_1}\right) \frac{f_0^{(r)}}{2\bar{\Delta}_0} \rho^{-3} + \frac{f_0^{(r)}}{2} \rho^{-3} \right] - \\ &\quad - \frac{2-4\nu_0}{2-4\nu_1} \left(1 + G_{10} \frac{1+\nu_1}{2-4\nu_1}\right) \frac{f_0^{(r)}}{2\bar{\Delta}_0}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Оскільки розв'язки $\bar{W}_{2,0}^+(r, \theta) \equiv 0$, $\bar{W}_{1,0}^-(r, \theta) \equiv 0$, то коефіцієнти $a_{2,0}^{(1)}$, $a_{1,0}^{(0)}$ і $b_{1,0}$ можна вибрати довільно.

Розв'язувальна система при $n=1$ має вигляд

$$\rho^{-1} a_{1,1}^{(0)} + 2(4\nu_0 - 1) \rho a_{2,1}^{(0)} - 2a_{1,1}^{(1)} - (4 - 4\nu_0) a_{2,1}^{(1)} = b_{1,1} + 2(4\nu_1 - 1) b_{2,1}, \quad (4.55)$$

$$\rho^{-1}a_{1,1}^{(0)} + (6 - 4\nu_0)\rho a_{2,1}^{(0)} + a_{1,1}^{(1)} + (4\nu_0 - 3)a_{2,1}^{(1)} = b_{1,1} + (6 - 4\nu_1)b_{2,1}, \quad (4.56)$$

$$6a_{1,1}^{(1)} + (4 - 2\nu_0)a_{2,1}^{(1)} - 4(1 + \nu_0)\rho a_{2,1}^{(0)} = -4G_{10}(1 + \nu_1)b_{2,1}, \quad (4.57)$$

$$-3a_{1,1}^{(1)} + (1 - 2\nu_0)a_{2,1}^{(1)} + 2(1 + \nu_0)\rho a_{2,1}^{(0)} = 2G_{10}(1 + \nu_1)b_{2,1}, \quad (4.58)$$

$$6(1 - \nu_0)\rho^2 a_{2,1}^{(1)} = f_1^{(r)} + 2f_1^{(\theta)}, \quad (4.59)$$

$$-2(1 + \nu_0)a_{2,1}^{(0)} + 3\rho^4 a_{1,n}^{(1)} + \rho^2 a_{2,1}^{(1)} = (f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)}) / 3. \quad (4.60)$$

Зазначимо, що умова статички (4.49) для зовнішнього навантаження приводить до такого співвідношення:

$$f_1^{(r)} + 2f_1^{(\theta)} = 0.$$

Тоді з рівняння (4.59) випливає, що $a_{2,1}^{(1)} = 0$. Два рівняння (4.57), (4.58) є пропорційними, тому одне з них треба прибрати. Залишається система з чотирьох рівнянь (4.55), (4.56), (4.58), (4.60) відносно невідомих $a_{1,1}^{(1)}$, $a_{1,1}^{(0)}$, $a_{2,1}^{(0)}$, $b_{2,1}$. Змінна $b_{1,1}$ є вільною і може приймати будь-які значення. Член з нею в загальному розв'язку відповідає вектору жорсткого зміщення. Зафіксуємо центр кулі і тоді $b_{1,1} = 0$. Після підстановки в попередню систему $a_{2,1}^{(1)} = 0$, $b_{1,1} = 0$ і спрощення отримаємо

$$b_{2,1} = \frac{3}{10}\rho^{-1}a_{1,1}^{(0)} + \rho a_{2,1}^{(0)}, \quad (4.61)$$

$$a_{1,1}^{(1)} + \left[1 - \frac{3}{10}(6 - 4\nu_1)\right]\rho^{-1}a_{1,1}^{(0)} + 4(\nu_1 - \nu_0)\rho a_{2,1}^{(0)} = 0, \quad (4.62)$$

$$-3a_{1,1}^{(1)} - \frac{3}{10}G_{10}(2 + 2\nu_1)\rho^{-1}a_{1,1}^{(0)} + [2 + 2\nu_0 - G_{10}(2 + 2\nu_1)]\rho a_{2,1}^{(0)} = 0, \quad (4.63)$$

$$3\rho^4 a_{1,1}^{(1)} - 2(1 + \nu_0)a_{2,1}^{(0)} = \frac{1}{3}(f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)}). \quad (4.64)$$

Система (4.62) – (4.64) має визначник

$$\bar{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 1 & \left[1 - \frac{3}{10}(6 - 4\nu_1)\right]\rho^{-1} & 4(\nu_1 - \nu_0)\rho \\ -3 & -\frac{3}{10}G_{10}(2 + 2\nu_1)\rho^{-1} & [2 + 2\nu_0 - G_{10}(2 + 2\nu_1)]\rho \\ 3\rho^4 & 0 & -2(1 + \nu_0) \end{vmatrix} =$$

$$= 6(1 + \nu_0)\frac{8 - 12\nu_1}{10}(\rho^{-1} - \rho^4) + \frac{12}{10}G_{10}(1 + \nu_0)(1 + \nu_1)\rho^{-1} + 6G_{10}\frac{8 - 12\nu_0}{10}(1 + \nu_1)\rho^4. \quad (4.65)$$

Формула (4.65) показує, що визначник $\bar{\Delta}_1$ є додатним. Отже, система (4.62) – (4.64) має єдиний розв'язок

$$a_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{15\bar{\Delta}_1}(f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)})[-(8 - 12\nu_1)(1 + \nu_0) + G_{10}(8 - 12\nu_0)(1 + \nu_1)], \quad (4.66)$$

$$a_{1,1}^{(0)} = -\frac{2}{3\bar{\Delta}_1}(f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)})[1 + 6\nu_1 - 5\nu_0 - G_{10}(1 + \nu_1)]\rho, \quad (4.67)$$

$$a_{2,1}^{(0)} = -\frac{1}{5\bar{\Delta}_1}(f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)})[4 - 6\nu_1 + G_{10}(1 + \nu_1)]\rho^{-1}, \quad b_{2,1} = -\frac{1 - \nu_0}{\bar{\Delta}_1}(f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)}). \quad (4.68)$$

Тепер розглянемо розв'язувальну систему при $n \geq 2$. Оскільки за теоремою 4.1 визначник системи є додатним, отже, система має єдиний розв'язок, який виглядає так:

$$a_{1,n}^{(1)} = \frac{f_n^{(r)} - nf_n^{(\theta)}}{\Delta_n} \left\{ \alpha_n \Delta_n^{(2)} \Delta_n^{(4)} \rho^n + (1 - G_{10})[\alpha_n n(2n - 1)\beta_n \Delta_n^{(3)}(\rho^{n-2} - \rho^n) - \right.$$

$$\left. - \alpha_n d_n^{-(0)} \Delta_n^{(4)} \rho^{3n-1} \right\} + \frac{f_n^{(r)} + (n+1)f_n^{(\theta)}}{\Delta_n} (1 - G_{10})[\alpha_n n(2n - 1)\Delta_n^{(3)} d_n^{+(0)} \rho^{n-2} +$$

$$+ \alpha_n n(n+2)(2n - 1)\Delta_n^{(4)} \rho^{3n-1}], \quad (4.69)$$

$$a_{2,n}^{(1)} = -\frac{f_n^{(r)} - nf_n^{(\theta)}}{\Delta_n} (1 - G_{10})\alpha_n (2n + 1)\beta_n \Delta_n^{(3)}(\rho^{n-2} - \rho^n) -$$

$$-\frac{f_n^{(r)} + (n+1)f_n^{(\theta)}}{\Delta_n} (1 - G_{10})[\alpha_n (2n + 1)\Delta_n^{(3)} d_n^{+(0)} \rho^{n-2} +$$

$$+ \alpha_n (n+2)(2n + 1)\Delta_n^{(4)} \rho^{3n+1}], \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned}
a_{1,n}^{(0)} = & \frac{f_n^{(r)} - n f_n^{(\theta)}}{\Delta_n} [(2n+1)\beta_n \Delta_n^{(2)} \Delta_n^{(3)} - (1-G_{10})(2n+1)\beta_n \Delta_n^{(3)} d_n^{-(0)} \rho^{2n+1}] + \\
& + \frac{f_n^{(r)} + (n+1)f_n^{(\theta)}}{\Delta_n} \left[(2n+1)\Delta_n^{(2)} \Delta_n^{(3)} d_n^{+(0)} + (n+2)(2n+1)\Delta_n^{(2)} \Delta_n^{(4)} \rho^{2n+3} + \right. \\
& \left. + (1-G_{10})n(n+2)(2n-1)(2n+1)\beta_n \Delta_n^{(3)} (\rho^{2n+1} - \rho^{2n+3}) \right], \quad (4.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2,n}^{(0)} = & -\frac{f_n^{(r)} - n f_n^{(\theta)}}{\Delta_n} [\alpha_n (2n+1) \Delta_n^{(2)} \Delta_n^{(3)} - (1-G_{10})\alpha_n (2n+1) \Delta_n^{(3)} d_n^{-(0)} \rho^{2n-1}] - \\
& - \frac{f_n^{(r)} + (n+1)f_n^{(\theta)}}{\Delta_n} (1-G_{10})\alpha_n n(n+2)(2n-1)(2n+1) \Delta_n^{(3)} (\rho^{2n-1} - \rho^{2n+1}). \quad (4.72)
\end{aligned}$$

З формул (4.69) – (4.72) і теореми 4.1 випливають оцінки коефіцієнтів побудованих розв'язків (4.4), (4.5) при $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
|a_{1,n}^{(1)}| & < C_1 (|f_n^{(r)}| + n |f_n^{(\theta)}|) \rho^{n-2}, \quad |a_{2,n}^{(1)}| < C_2 n^{-1} (|f_n^{(r)}| + n |f_n^{(\theta)}|) \rho^{n-2}, \\
|a_{1,n}^{(0)}| & < C_3 n^{-1} (|f_n^{(r)}| + n |f_n^{(\theta)}|), \quad |a_{2,n}^{(0)}| < C_4 n^{-2} (|f_n^{(r)}| + n |f_n^{(\theta)}|), \\
|b_{1,n}| & < C_5 n (|f_n^{(r)}| + n |f_n^{(\theta)}|) \rho^{n-2}, \quad |b_{2,n}| < C_6 (|f_n^{(r)}| + n |f_n^{(\theta)}|) \rho^{n-2},
\end{aligned}$$

де $(C_k)_{k=1}^6$ – додатні константи, які не залежать від n . Ці оцінки забезпечують абсолютну і рівномірну збіжність рядів у формулах (4.4), (4.5) в кулі аж до її межі, а також виконання умови $\bar{U} \in C^2(\Omega_0 \cup \Omega_1) \cap C^1(\Omega_0 \cup \overline{\Omega_1}) \cap C(\overline{\Omega_0 \cup \Omega_1})$. Отже, теорему доведено.

4.3 Комп'ютерний експеримент

Чисельно задача (4.1) – (4.3) розв'язувалася при таких умовах: матеріалом кулі було вибрано сталь з пружними константами $G_0 = 82$ ГПа, $\nu_0 = 0.28$, матеріалами включення вибиралися латунь ($G_1 = 35.2$ ГПа, $\nu_1 = 0.35$) або алюміній ($G_1 = 26$ ГПа, $\nu_1 = 0.34$).

Перший тип навантаження. Зовнішнє навантаження на поверхню кулі задається вектор-функцією $\vec{f}(\theta) = -2G_0 \sin \theta \vec{e}_r$ (воно автоматично зрівноважено).

На рисунку 4.1 наведено розподіл нормальних напружень на поверхні включення з латуні в залежності від відносного розміру включення $\rho = R_1 / R_0$. Природно, що максимальні за модулем стискаючі напруження на поверхні включення діють в його екваторіальній області, причому вони тим більше, чим більше відносний розмір включення. На полюсах включення, навпаки, най більше за модулем напруження спостерігається при найменшому відносному розмірі включення.

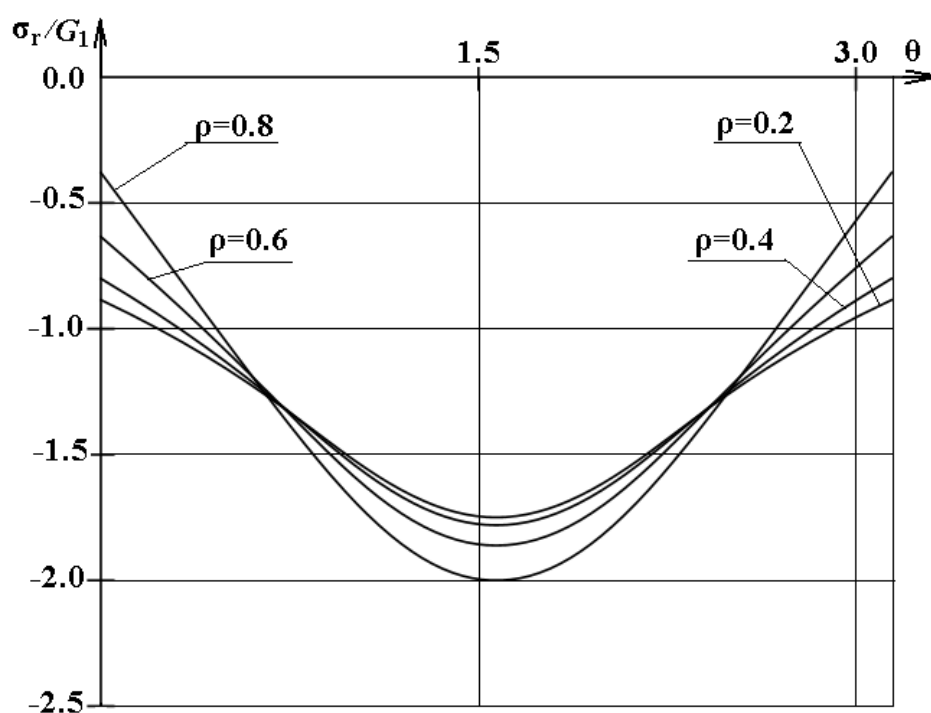


Рисунок 4.1 – Графіки напружень σ_r / G_1 на поверхні включення з латуні

На рисунку 4.2 показано розподіл нормальних напружень на поверхні включення з алюмінію. Зовнішнє навантаження таке ж саме, як у попередньому випадку. Хоча характер напружень залишився без зміни, абсолютні значення напружень змінилися. Це пов'язане в основному зі зміною модуля зсуву (для алюмінію він на 26% менше ніж для латуні, а відповідні максимальні за модулем напруження при $\rho = 0.8$ зросли на 21%).

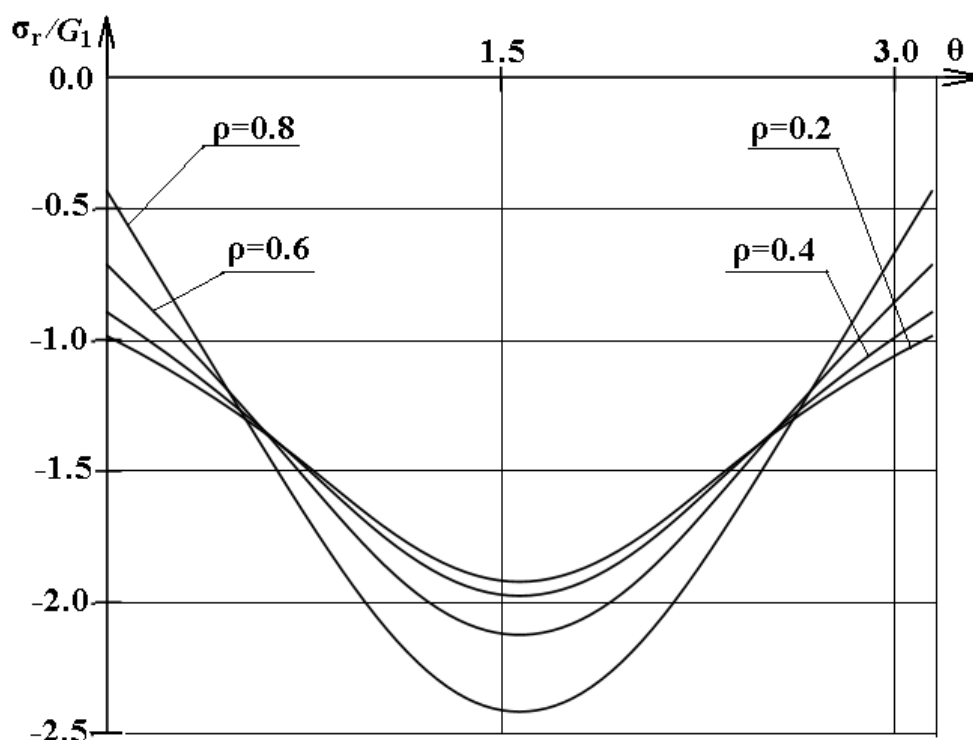


Рисунок 4.2 – Графіки напружень σ_r / G_1 на поверхні включення з алюмінію

Другий тип навантаження. На рисунках 4.3, 4.4 наведено розподіл дотичних і нормальних напружень на поверхні включення (матеріал включення латунь) при зовнішньому навантаженні на поверхні кулі, яке описується вектор-функцією $\vec{f}(\theta) = 2G_0[3\sin\theta\cos\theta\vec{e}_r + \sin^2\theta\vec{e}_\theta]$. На відміну від першого типу навантаження, кожна компонента $\vec{f}(\theta)$ не є зрівноваженою, але весь вектор задовольняє умову статички (4.49). Дотичні напруження і модулі нормальних напружень зростають при зростанні відносного розміру включення. Характер нормальних напружень відрізняється від попереднього випадку і визначається особливістю зовнішнього навантаження. При великому відносному розмірі включення спостерігається область на його поверхні в околі полюсів де знак нормального напруження відрізняється від знаку навантаження.

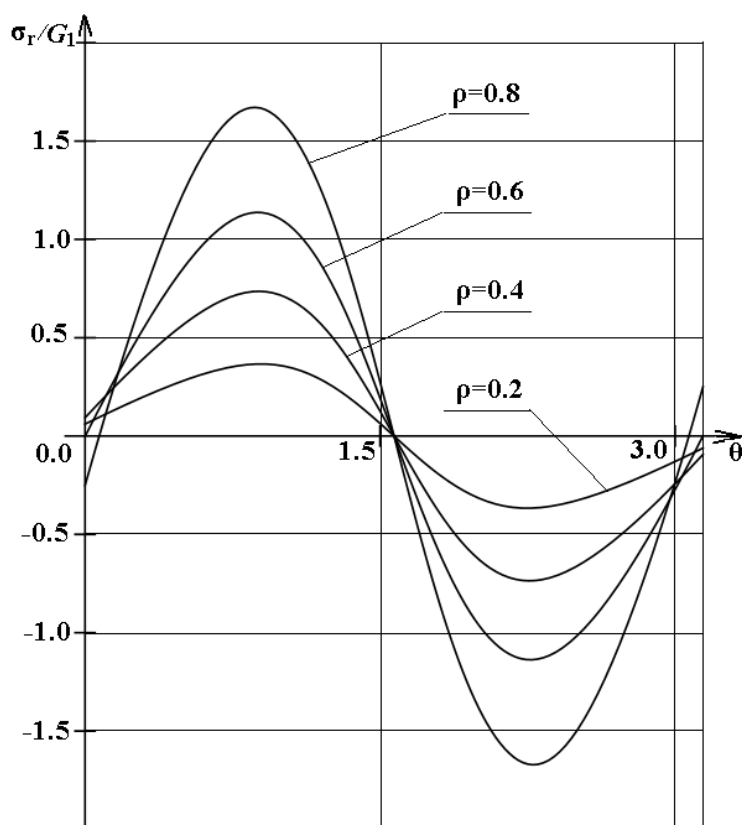


Рисунок 4.3 – Графіки напружень σ_r / G_1 на поверхні включення. Другий тип навантаження

Швидкість практичної збіжності методу показано в таблицях 4.1, 4.2 на прикладі обчислення нормальних і дотичних напружень на поверхні включення при $\rho = 0.8$. Тут **nmax** (параметр збіжності) – верхня межа підсумовування при заміні нескінченних сум скінченними. Найнижча точність спостерігається при обчисленні $\sigma_r(0) / G_1$ при **nmax** = 30. Вона дорівнює 0.088 %.

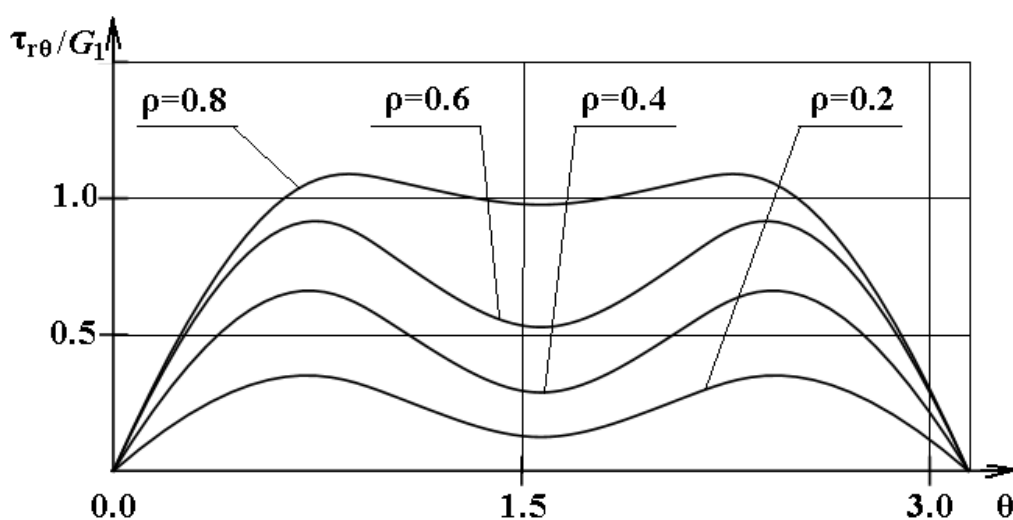


Рисунок 4.4 – Графіки напружень $\tau_{r\theta} / G_1$ на поверхні включення. Другий тип навантаження

Таблиця 4.1. Практична збіжність методу при обчисленні $\sigma_r(\theta) / G_1$, $\rho = 0.8$

θ / n_{\max}	0	$\pi / 6$	$\pi / 3$
30	-0.25026	1.61468	2.04111
40	-0.25048	1.61470	2.04110
50	-0.25049	1.61470	2.04110

Таблиця 4.2. Практична збіжність методу при обчисленні $\tau_{r\theta}(\theta) / G_1$, $\rho = 0.8$

θ / n_{\max}	$\pi / 6$	$\pi / 3$	$\pi / 2$
30	1.16967	1.06640	0.93207
40	1.16966	1.06641	0.93206
50	1.16966	1.06641	0.93206

4.4 Висновки до розділу 4

Вперше звичайним методом Фур'є отримано точний розв'язок другої основної вісесиметричної крайової задачі теорії пружності в загальній постановці

для кулі з концентричним сферичним включенням. Проблема розв'язання такої задачі пов'язана зі складністю побудови обґрунтованого розв'язку її методом Фур'є в певному класі функцій. В свою чергу, вона залежить від оцінки знизу модуля багатопараметричного визначника розв'язувальної системи, яку вперше було виконано в дисертаційній роботі. Наведено результати чисельних розрахунків для двох типів матеріалів включень і для двох типів зовнішніх навантажень. Ефективність методу показано на прикладі дослідження його практичної збіжності.

РОЗДІЛ 5

ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРОСТОРУ З ДВОМА ВКЛЮЧЕННЯМИ І ТЕПЛОВИДІЛЕННЯМ

5.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу знаходження напружено-деформованого стану кусково-однорідного пружного простору з двома включеннями. Вважаємо, що в просторі Ω розташовані сферичні включення Ω_1 і Ω_2 , центри яких знаходяться в точках O_1 і O_2 ($|\overrightarrow{O_1O_2}| = z_{12}$). Радіуси включень дорівнюють R_1 і R_2 відповідно ($R_1 + R_2 < z_{12}$), а їх межі позначимо Γ_1 і Γ_2 . Трифазна система $(\Omega_i)_{i=0}^2$ ($\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$) має термомеханічні характеристики $(G_j, \nu_j, \alpha_j, k_j)$ ($j = 0 \div 2$), де G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного температурного розширення, k – коефіцієнт теплопровідності. Вважаємо, що включення Ω_1 і Ω_2 виділяють тепло з густинами джерел $\rho_1 = k_1 f_1$ і $\rho_2 = k_2 f_2$, а на поверхнях включень виконуються умови ідеального теплового контакту. Температурне поле і напружений стан на нескінченності задовольняють умови регулярності.

Потрібно визначити температурне поле і термопружний стан в областях Ω_j ($j = 0 \div 2$), які задовольняють такі умови:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{U}_j + \frac{1}{1-2\nu_j} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{U}_j) = \alpha_j \frac{2+2\nu_j}{1-2\nu_j} \vec{\nabla} T_j, \quad \vec{x} \in \Omega_j; \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla}^2 T_0 = 0, \quad \vec{x} \in \Omega_0, \quad \vec{\nabla}^2 T_i = f_i, \quad \vec{x} \in \Omega_i \quad i = 1, 2; \quad (5.2)$$

$$T_{0|\Gamma_i} = T_{i|\Gamma_i}, \quad \left(k_0 \frac{\partial T_0}{\partial n_i} \right)_{|\Gamma_i} = \left(k_i \frac{\partial T_i}{\partial n_i} \right)_{|\Gamma_i}, \quad i = 1, 2; \quad (5.3)$$

$$(\vec{U}_0)_{|\Gamma_i} = (\vec{U}_i)_{|\Gamma_i}, \quad (F\vec{U}_0)_{|\Gamma_i} = (F\vec{U}_i)_{|\Gamma_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5.4)$$

Тут через T_j, \vec{U}_j ($j = 0 \div 2$) позначено температурне поле і поле переміщень в областях Ω_j , $F\vec{U}_j$ – вектор напружень на поверхнях включень, відповідний

вектору переміщень \vec{U}_j , f_i ($i=1,2$) – задані функції, $\vec{\nabla}$ – оператор набла, \vec{n}_i – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні Γ_i , $|\Gamma_i|$ – площа поверхні Γ_i .

Уведемо дві однаково напрямлені сферичні системи координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ ($j=1,2$), початки яких сумістимо з точками O_j , а вісь Oz має напрямок вектора $\overrightarrow{O_1O_2}$. Їх координати зв'язані формулами

$$r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2; \quad r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2 + z_{12}.$$

У введених координатах поверхня Γ_j має рівняння $r_j = R_j$. Будемо вважати, що функції f_i ($i=1,2$) мають осеву симетрію і є гармонічними функціями, причому зображується абсолютно і рівномірно в областях $\overline{\Omega_j}$ ($j=1,2$) збіжними рядами виду

$$f_i(r_i, \theta_i) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(i)} \frac{r_i^n}{R_i^n} P_n(\cos \theta_i). \quad (5.5)$$

Тут і далі $P_n^m(x)$ – функції Лежандра першого роду.

5.2 Розв'язання температурної задачі

Розв'яжемо задачу (5.2), (5.3) для рівняння теплопровідності. Розв'язок цієї задачі в області Ω_0 будемо шукати у вигляді

$$T_0(\vec{x}) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} R_j^{n+1} w_n^+(r_j, \theta_j), \quad \vec{x} \in \Omega_0; \quad (5.6)$$

з невідомими коефіцієнтами $\{t_n^{(j)}\}_{n=0, j=1}^{\infty, 2}$, $\{g_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$. Тут вісесиметричні базисні розв'язки рівняння Лапласа для зовнішності та внутрішності кулі $\Omega^{\pm} = \{(r, \theta, \varphi) : r_{<R}^{>R}\}$ позначено (2.2), де $P_n(x)$ – многочлени Лежандра, знак $+$ ($-$) відповідає зовнішньому (внутрішньому) розв'язку.

Використаємо теореми додавання 2.2 функцій і отримаємо (2.66) для запису розв'язку (5.6) у системі координат з початком у точці O_j ($j=1,2$)

$$T_0(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} R_j^{n+1} w_n^+(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n} w_n^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(j)} t_k^{(3-j)}, \quad (5.7)$$

де

$$u_{n,k}^{(j)} = h_{n,k}^{(j)} \omega_{n,k+1}^{(j)}, \quad \omega_{n,k}^{(j)} = \left(\frac{R_j}{z_{12}} \right)^n \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^k.$$

Побудуємо розв'язки рівнянь Пуассона (5.2) в областях Ω_j ($j = 1, 2$). Будемо їх шукати у вигляді

$$T_j(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n} [g_n^{(j)} r_j^2 + c_n^{(j)}] w_n^-(r_j, \theta_j), \quad \vec{x} \in \Omega_j, \quad j = 1, 2. \quad (5.8)$$

Подіємо оператором Лапласа на функції $T_j(\vec{x})$

$$\Delta T_j(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n} 2(2n+3) g_n^{(j)} w_n^-(r_j, \theta_j), \quad \vec{x} \in \Omega_j, \quad j = 1, 2.$$

Порівнюючи цей результат з (4.2), (4.5), отримаємо

$$g_n^{(j)} = -\frac{f_n^{(j)}}{2(2n+3)}. \quad (5.9)$$

Задовольняючи умови спряження (5.3) теплових полів (5.7) і (5.8) на поверхнях включень, приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку після простих алгебраїчних перетворень можна записати так:

$$t_n^{(j)} + \frac{(k_0 - k_j)n}{k_0 n + k_j(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(j)} t_k^{(3-j)} = \frac{k_0}{k_0 n + k_j(n+1)} \frac{R_j^2 f_n^{(j)}}{(2n+3)},$$

$$j = 1, 2, \quad n = 0 \div \infty; \quad (5.10)$$

$$c_n^{(j)} = t_n^{(j)} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(j)} t_k^{(3-j)} + \frac{R_j^2 f_n^{(j)}}{2(2n+3)}, \quad j = 1, 2, \quad n = 0 \div \infty. \quad (5.11)$$

З умов, які накладаються на функції f_j ($j = 1, 2$), випливає, що $\{f_n^{(j)}\}_{n=0, j=1}^{\infty, 2} \in l_2 \times l_2$. Тоді теорема 3.1 разом з еквівалентністю задачі (5.2), (5.3), (5.5) розв'язувальній системі (5.10), (5.11) (її можна довести) обґрунтовує існування коректного розв'язку системи (5.10) у просторі $l_2 \times l_2$ і виконання умов

$(2n+3)t_n^{(j)} \in l_1$, $(2n+3)c_n^{(j)} \in l_1$. Тепер формули (5.6), (5.8) відновлюють температурне поле у трифазному тілі $(\Omega_i)_{i=0}^2$.

5.3 Розв'язання термопружної задачі.

Тепер розглянемо термопружну задачу (5.1), (5.4), яка відповідає побудованому вище температурному полю в областях $(\Omega_i)_{i=0}^2$. Для цього скористаємось доведеними в розділі 2 результатами. Розглянемо в областях Ω^\pm систему базисних вісесиметричних розв'язків рівняння Ламе (однорідне рівняння (5.1)).

Для вектор-функцій (2.4), (2.5) в системах координат з початками O_j доведено такі теореми додавання (2.68), (2.69), (2.70) і звертаємо увагу на зауваження до теорем $(r_{3-j} < z_{12}, j=1,2)$.

Як відомо, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) в області Ω_j ($j=0 \div 2$) можна записати в такому вигляді:

$$\vec{U}_j(\vec{x}) = \vec{U}_j^G(\vec{x}) + \vec{U}_j^T(\vec{x}),$$

де $\vec{U}_j^G(\vec{x})$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $\vec{U}_j^T(\vec{x})$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (далі називається вектором термічних переміщень). Завдяки базисності розв'язків (2.4) (2.5) в областях Ω^\pm загальний розв'язок однорідного рівняння в областях $(\Omega_i)_{i=0}^2$ можна записати так:

$$\vec{U}_0^G(\vec{x}) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(j)} R_j^{n+3} \vec{W}_{1,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(j)} R_j^{n+1} \vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j), \quad \vec{x} \in \Omega_0; \quad (5.12)$$

$$\vec{U}_j^G(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{1,n}^{(j)} R_j^{-n+2} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2,n}^{(j)} R_j^{-n} \vec{W}_{2,n}^-(r_j, \theta_j), \quad \vec{x} \in \Omega_j. \quad (5.13)$$

Тут $\{a_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i,j=1}^{\infty,2}$, $\{b_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i,j=1}^{\infty,2}$ – невідомі коефіцієнти.

Будемо шукати частинний розв'язок $\vec{U}_j^T(\vec{x})$ в області Ω_j у вигляді

$$\vec{U}_j^T(\vec{x}) = \vec{\nabla} \Phi_j(\vec{x}).$$

Тоді для функції $\Phi_j(\vec{x})$ отримаємо рівняння Пуассона

$$\Delta \Phi_j(\vec{x}) = 2\alpha_j^{\nu_j} T_j(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_j, \quad \alpha_j^{\nu_j} = \frac{\alpha_j}{2} \frac{1+\nu_j}{1-\nu_j},$$

розв'язок якого можна записати так:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\vec{x}) &= -\alpha_0^{\nu_0} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_j^{n+1} t_n^{(j)}}{2n-1} r_j^2 w_n^+(r_j, \theta_j), \quad \vec{x} \in \Omega_0; \\ \Phi_j(\vec{x}) &= \alpha_j^{\nu_j} \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n} \left[\frac{g_n^{(j)} r_j^4}{2(2n+5)} + \frac{c_n^{(j)} r_j^2}{2n+3} \right] w_n^-(r_j, \theta_j), \quad \vec{x} \in \Omega_j, \quad j=1,2. \end{aligned}$$

Таким чином, вектор термічних переміщень в областях $(\Omega_i)_{i=0}^2$ задається формулами ($j=1,2$)

$$\vec{U}_0^T(\vec{x}) = -\alpha_0^{\nu_0} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_j^{n+1} t_n^{(j)}}{2n-1} \vec{V}_n^+(r_j, \theta_j), \quad \vec{x} \in \Omega_0; \quad (5.14)$$

$$\vec{U}_j^T(\vec{x}) = \alpha_j^{\nu_j} \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n} \left[\frac{g_n^{(j)} \vec{V}_n^{-(1)}(r_j, \theta_j)}{2(2n+5)} + \frac{c_n^{(j)} \vec{V}_n^-(r_j, \theta_j)}{2n+3} \right], \quad \vec{x} \in \Omega_j. \quad (5.15)$$

Формули (2.68) – (2.70) дають змогу записати вектор-функцію $\vec{U}_0(\vec{x})$ в сферичній системі координат з початком у точці O_j

$$\begin{aligned} \vec{U}_0(r_j, \theta_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(j)} R_j^{n+3} \vec{W}_{1,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n+2} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,j)} a_{1,k}^{(3-j)} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(j)} R_j^{n+1} \vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n+2} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(2,j)} a_{2,k}^{(3-j)} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n} \vec{W}_{2,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(3,j)} a_{2,k}^{(3-j)} - \alpha_0^{\nu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_j^{n+1} t_n^{(j)}}{2n-1} \vec{V}_n^+(r_j, \theta_j) - \\ &- \alpha_0^{\nu_0} \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n+2} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(4,j)} t_k^{(3-j)} + \alpha_0^{\nu_0} \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n} \vec{V}_n^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(5,j)} t_k^{(3-j)}, \quad (5.16) \end{aligned}$$

де

$$u_{n,k}^{(1,j)} = h_{n,k}^{(j)} \omega_{n-2,k+3}^{(j)}, \quad u_{n,k}^{(2,j)} = h_{n,k}^{(j)} \gamma_{k,n}^{(1)} \omega_{n-2,k+1}^{(j)}, \quad u_{n,k}^{(3,j)} = h_{n,k}^{(j)} \gamma_{k,n}^{(2)} \omega_{n,k+1}^{(j)};$$

$$u_{n,k}^{(4,j)} = h_{n,k}^{(j)} \lambda_{n,k} \omega_{n-2,k+1}^{(j)}, \quad u_{n,k}^{(5,j)} = h_{n,k}^{(j)} \omega_{n,k+1}^{(j)}, \quad \lambda_{n,k} = \frac{2nk - n - k}{(n+k)(2k-1)(2n-1)}.$$

Згідно з формулами (5.13), (5.15)

$$\begin{aligned} \vec{U}_j(r_j, \theta_j) = & \sum_{n=0}^{\infty} b_{1,n}^{(j)} R_j^{-n+2} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2,n}^{(j)} R_j^{-n} \vec{W}_{2,n}^-(r_j, \theta_j) + \\ & + \alpha_j^{\nu_j} \sum_{n=0}^{\infty} R_j^{-n} \left[\frac{g_n^{(j)}}{2(2n+5)} \vec{V}_n^{-(1)}(r_j, \theta_j) + \frac{c_n^{(j)}}{2n+3} \vec{V}_n^-(r_j, \theta_j) \right], \quad j=1,2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Переходячи в переміщеннях (5.16), (5.17) до вектора напружень на поверхні Γ_j і виконуючи умови спряження (5.4), приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\{a_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i,j=1}^{\infty,2}$, $\{b_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i,j=1}^{\infty,2}$

$$\begin{aligned} nb_{1,n}^{(j)} + \beta_{1,n}^{-(j)} b_{2,n}^{(j)} + \alpha_j^{\nu_j} \frac{n+4}{2(2n+5)} R_j^2 g_n^{(j)} + \alpha_j^{\nu_j} \frac{n+2}{2n+3} c_n^{(j)} = \\ = -(n+1)a_{1,n}^{(j)} + \beta_{1,n}^{+(0)} a_{2,n}^{(j)} + n \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,j)} a_{1,k}^{(3-j)} + \sum_{k=0}^{\infty} [nu_{n,k}^{(2,j)} - \beta_{1,n}^{-(0)} u_{n,k}^{(3,j)}] a_{2,k}^{(3-j)} + \\ + \alpha_0^{\nu_0} \frac{n-1}{2n-1} t_n^{(j)} - \alpha_0^{\nu_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left[nu_{n,k}^{(4,j)} - \frac{n+2}{2n+3} u_{n,k}^{(5,j)} \right] t_k^{(3-j)}; \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} b_{1,n}^{(j)} + \beta_{2,n}^{-(j)} b_{2,n}^{(j)} + \alpha_j^{\nu_j} \frac{R_j^2 g_n^{(j)}}{2(2n+5)} + \alpha_j^{\nu_j} \frac{c_n^{(j)}}{2n+3} = a_{1,n}^{(j)} + \beta_{2,n}^{+(0)} a_{2,n}^{(j)} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,j)} a_{1,k}^{(3-j)} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} [u_{n,k}^{(2,j)} - \beta_{2,n}^{-(0)} u_{n,k}^{(3,j)}] a_{2,k}^{(3-j)} - \alpha_0^{\nu_0} \frac{t_n^{(j)}}{2n-1} - \alpha_0^{\nu_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left[u_{n,k}^{(4,j)} - \frac{u_{n,k}^{(5,j)}}{2n+3} \right] t_k^{(3-j)}; \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(1,1)} a_{1,n}^{(j)} + \gamma_n^{(1,2)} a_{2,n}^{(j)} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k}^{(1,1,j)} a_{1,k}^{(3-j)} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k}^{(1,2,j)} a_{2,k}^{(3-j)} + \alpha_0^{\nu_0} \gamma_{t,n}^{(1,j)} t_n^{(j)} + \\ + \alpha_0^{\nu_0} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{t,n,k}^{(1,j)} t_k^{(3-j)} = \frac{G_j}{G_0} (n-1) n b_{1,n}^{(j)} + \frac{G_j}{G_0} \rho_{1,n}^{-(j)} b_{2,n}^{(j)} + \\ + \frac{G_j}{G_0} \alpha_j^{\nu_j} \left[-2 + \frac{(n+3)(n+4)}{2(2n+5)} \right] R_j^2 g_n^{(j)} + \frac{G_j}{G_0} \alpha_j^{\nu_j} \left[-2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \right] c_n^{(j)}; \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\gamma_n^{(2,1)} a_{1,n}^{(j)} + \gamma_n^{(2,2)} a_{2,n}^{(j)} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k}^{(2,1,j)} a_{1,k}^{(3-j)} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k}^{(2,2,j)} a_{2,k}^{(3-j)} +$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_0^{\nu_0} \gamma_{t,n}^{(2,j)} t_n^{(j)} + \alpha_0^{\nu_0} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{t,n,k}^{(2,j)} t_k^{(3-j)} = \frac{G_j}{G_0} (n-1) b_{1,n}^{(j)} + \frac{G_j}{G_0} \rho_{2,n}^{-(j)} b_{2,n}^{(j)} + \\
& + \frac{G_j}{G_0} \alpha_j^{\nu_j} \frac{(n+3)}{2(2n+5)} R_j^2 g_n^{(j)} + \frac{G_j}{G_0} \alpha_j^{\nu_j} \frac{n+1}{2n+3} c_n^{(j)}, \quad (5.21)
\end{aligned}$$

де

$$\gamma_n^{(1,1)} = (n+2)(n+1), \quad \gamma_n^{(1,2)} = \rho_{1,n}^{+(0)}, \quad \gamma_{n,k}^{(1,1,j)} = n(n-1)u_{n,k}^{(1,j)}, \quad \gamma_{t,n}^{(1,j)} = -\left[2 + \frac{n(n-1)}{2n-1}\right];$$

$$\gamma_{n,k}^{(1,2,j)} = n(n-1)u_{n,k}^{(2,j)} - \rho_{1,n}^{-(0)} u_{n,k}^{(3,j)}, \quad \gamma_{t,n,k}^{(1,j)} = \left[-2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}\right] u_{n,k}^{(5,j)} - n(n-1)u_{n,k}^{(4,j)};$$

$$\gamma_n^{(2,1)} = -(n+2), \quad \gamma_n^{(2,2)} = \rho_{2,n}^{+(0)}, \quad \gamma_{n,k}^{(2,1,j)} = (n-1)u_{n,k}^{(1,j)}, \quad \gamma_{t,n}^{(2,j)} = \frac{n}{2n-1};$$

$$\gamma_{n,k}^{(2,2,j)} = (n-1)u_{n,k}^{(2,j)} - \rho_{2,n}^{-(0)} u_{n,k}^{(3,j)}, \quad \gamma_{t,n,k}^{(2,j)} = \frac{n+1}{2n+3} u_{n,k}^{(5,j)} - (n-1)u_{n,k}^{(4,j)}.$$

Після виключення невідомих $\{b_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i,j=1}^{\infty,2}$ і переходу до фізично безрозмірних параметрів $\alpha_0^{\nu_0} t_n^{(j)} = \bar{t}_n^{(j)}$, $\alpha_j^{\nu_j} R_j^2 g_n^{(j)} = \bar{g}_n^{(j)}$, $\alpha_j^{\nu_j} c_n^{(j)} = \bar{c}_n^{(j)}$, $\alpha_j^{\nu_j} R_j^2 f_n^{(j)} = \bar{f}_n^{(j)}$ запишемо систему (5.19) – (5.21) так:

$$\begin{aligned}
& d_n^{(i,1,j)} a_{1,n}^{(j)} + d_n^{(i,2,j)} a_{2,n}^{(j)} + \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}^{(i,1,j)} a_{1,k}^{(3-j)} + \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}^{(i,2,j)} a_{2,k}^{(3-j)} = \\
& = -m_{t,n}^{(i,j)} \bar{t}_n^{(j)} - \sum_{k=0}^{\infty} m_{t,n,k}^{(i,j)} \bar{t}_k^{(3-j)} + \xi_{g,n}^{(i,j)} \bar{g}_n^{(j)} + \xi_{c,n}^{(i,j)} \bar{c}_n^{(j)}, \quad n=0 \div \infty, j=1,2; \quad (5.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_{1,n}^{(j)} = \left[1 + \frac{(2n+1)}{\Delta_n^{-(j)}} \beta_{2,n}^{-(j)}\right] a_{1,n}^{(j)} + p_n^{+(j)} a_{2,n}^{(j)} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,j)} a_{1,k}^{(3-j)} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} [u_{n,k}^{(2,j)} - p_n^{-(j)} u_{n,k}^{(3,j)}] a_{2,k}^{(3-j)} - \left[\frac{1}{2n-1} + \frac{\beta_{2,n}^{-(j)}}{\Delta_n^{-(j)}}\right] \bar{t}_n^{(j)} + \sum_{k=0}^{\infty} [q_n^{(j)} u_{n,k}^{(5,j)} - u_{n,k}^{(4,j)}] \bar{t}_k^{(3-j)} - \\
& - \frac{1}{2(2n+5)} \left[1 - 4 \frac{\beta_{2,n}^{-(j)}}{\Delta_n^{-(j)}}\right] \bar{g}_n^{(j)} - q_n^{(j)} \bar{c}_n^{(j)}, \quad n=0 \div \infty, j=1,2; \quad (5.23)
\end{aligned}$$

$$b_{2,n}^{(j)} = -\frac{2n+1}{\Delta_n^{-(j)}} a_{1,n}^{(j)} + \frac{\Delta_n^{+(0)}}{\Delta_n^{-(j)}} a_{2,n}^{(j)} - \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(j)}} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(3,j)} a_{2,k}^{(3-j)} + \frac{1}{\Delta_n^{-(j)}} \bar{t}_n^{(j)} - \frac{2}{2n+5} \frac{1}{\Delta_n^{-(j)}} \bar{g}_n^{(j)} +$$

$$+ \frac{2}{2n+3} \frac{1}{\Delta_n^{-(j)}} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(5,j)} \bar{t}_k^{(3-j)} - \frac{2}{2n+3} \frac{1}{\Delta_n^{-(j)}} \bar{c}_n^{(j)}, \quad n=0 \div \infty, j=1,2, \quad (5.24)$$

де

$$q_n^{(j)} = \frac{1}{2n+3} \left[1 - 2 \frac{\beta_{2,n}^{-(j)}}{\Delta_n^{-(j)}} \right], \quad p_n^{\pm(j)} = \beta_{2,n}^{\pm(0)} - \frac{\Delta_n^{\pm(0)}}{\Delta_n^{-(j)}} \beta_{2,n}^{-(j)}, \quad \Delta_n^{\pm(j)} = \beta_{1,n}^{\pm(j)} - n \beta_{2,n}^{\pm(j)};$$

$$d_n^{(i,s,j)} = \gamma_n^{(i,s)} - \xi_n^{(i,s,j)}, \quad m_{n,k}^{(i,s,j)} = \gamma_{n,k}^{(i,s,j)} - \xi_{n,k}^{(i,s,j)}, \quad \xi_{n,k}^{(1,1,j)} = \frac{G_j}{G_0} n(n-1) u_{n,k}^{(1,j)};$$

$$m_{t,n}^{(i,j)} = \gamma_{t,n}^{(i,j)} - \xi_{t,n}^{(i,j)}, \quad m_{t,n,k}^{(i,j)} = \gamma_{t,n,k}^{(i,j)} - \xi_{t,n,k}^{(i,j)}, \quad \xi_{n,k}^{(2,1,j)} = \frac{G_j}{G_0} (n-1) u_{n,k}^{(1,j)};$$

$$\xi_n^{(1,1,j)} = \frac{G_j}{G_0} \left[(n-1)n + (2n+1) \mu_{1,n}^{(j)} \right], \quad \xi_n^{(1,2,j)} = \frac{G_j}{G_0} \left[(n-1)n \beta_{2,n}^{+(0)} - \Delta_n^{+(0)} \mu_{1,n}^{(j)} \right];$$

$$\xi_n^{(2,1,j)} = \frac{G_j}{G_0} \left[n-1 + (2n+1) \mu_{2,n}^{(j)} \right], \quad \xi_n^{(2,2,j)} = \frac{G_j}{G_0} \left[(n-1) \beta_{2,n}^{+(0)} - \Delta_n^{+(0)} \mu_{2,n}^{(j)} \right];$$

$$\xi_{n,k}^{(1,2,j)} = \frac{G_j}{G_0} n(n-1) u_{n,k}^{(2,j)} - \frac{G_j}{G_0} \left[n(n-1) \beta_{2,n}^{-(0)} - \Delta_n^{-(0)} \mu_{1,n}^{(j)} \right] u_{n,k}^{(3,j)};$$

$$\xi_{n,k}^{(2,2,j)} = \frac{G_j}{G_0} (n-1) u_{n,k}^{(2,j)} - \frac{G_j}{G_0} \left[(n-1) \beta_{2,n}^{-(0)} - \Delta_n^{-(0)} \mu_{2,n}^{(j)} \right] u_{n,k}^{(3,j)};$$

$$\xi_{t,n}^{(1,j)} = -\frac{G_j}{G_0} \left[\frac{n(n-1)}{2n-1} + \mu_{1,n}^{(j)} \right], \quad \xi_{t,n}^{(2,j)} = -\frac{G_j}{G_0} \left[\frac{n-1}{2n-1} + \mu_{2,n}^{(j)} \right];$$

$$\xi_{t,n,k}^{(1,j)} = -\frac{G_j}{G_0} n(n-1) u_{n,k}^{(4,j)} + \frac{G_j}{G_0} \left[\frac{n(n-1)}{2n+3} - \frac{2\mu_{1,n}^{(j)}}{(2n+3)} \right] u_{n,k}^{(5,j)};$$

$$\xi_{t,n,k}^{(2,j)} = -\frac{G_j}{G_0} (n-1) u_{n,k}^{(4,j)} + \frac{G_j}{G_0} \left[\frac{n-1}{2n+3} - \frac{2\mu_{2,n}^{(j)}}{(2n+3)} \right] u_{n,k}^{(5,j)};$$

$$\xi_{g,n}^{(1,j)} = \frac{G_j}{G_0} \frac{2}{2n+5} \left[-2 + \mu_{1,n}^{(j)} \right], \quad \xi_{c,n}^{(1,j)} = \frac{G_j}{G_0} \frac{2}{2n+3} \left[-2 + \mu_{1,n}^{(j)} \right];$$

$$\xi_{g,n}^{(2,j)} = \frac{G_j}{G_0} \frac{2}{2n+5} \left[1 + \mu_{2,n}^{(j)} \right], \quad \xi_{c,n}^{(2,j)} = \frac{G_j}{G_0} \frac{2}{2n+3} \left[1 + \mu_{2,n}^{(j)} \right];$$

$$\mu_{1,n}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_n^{-(j)}} \left[n(n-1) \beta_{2,n}^{-(j)} - \rho_{1,n}^{-(j)} \right], \quad \mu_{2,n}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_n^{-(j)}} \left[(n-1) \beta_{2,n}^{-(j)} - \rho_{2,n}^{-(j)} \right];$$

$$\Delta_n^{\pm(j)} = \beta_{1,n}^{\pm(j)} - n\beta_{2,n}^{\pm(j)}, \beta_{1,n}^{+(j)} = -n(n+3-4\nu_j), \beta_{1,n}^{-(j)} = (n+1)(n+4\nu_j-2);$$

$$\beta_{2,n}^{+(j)} = n+4\nu_j-4, \beta_{2,n}^{-(j)} = n+5-4\nu_j, \rho_{1,n}^{+(j)} = n(n^2+3n-2\nu_j);$$

$$\rho_{1,n}^{-(j)} = (n+1)(n^2-n-2\nu_j-2), \rho_{2,n}^{+(j)} = -(n^2+2\nu_j-2), \rho_{2,n}^{-(j)} = n^2+2n+2\nu_j-1.$$

Теорема 5.1. Якщо умови $R_1 + R_2 < z_{12}$, $\nu_j \in (0, 0.5)$, $G_j > 0$ задовольняються, оператор системи (5.22) у просторі l_2^4 є фредгольмовим оператором.

Доведення теореми ґрунтується на оцінках матричних елементів системи (5.22), які повністю аналогічні оцінці, отриманій у теоремі 1, і на наступному новому результаті.

5.4. Чисельні результати та їх аналіз

Чисельний розв'язок задачі розіб'ємо на два етапи. На першому етапі розв'язується система (5.10), (5.11) для визначення температурного поля в областях $(\Omega_i)_{i=0}^2$. Результат першого етапу використано для розв'язання системи (5.22) – (5.24). Згідно з теоремами 3.1, 5.1, означені системи мають фредгольмові оператори і однозначно розв'язні. Відомо, що такі системи можна коректно чисельно розв'язати методом редукції. При цьому вибиралися такі матеріали: для матриці Ω_0 – сталь, для включення Ω_1 – латунь, для включення Ω_2 – алюміній з термомеханічними характеристиками $\nu_0 = 0.28$, $\nu_1 = 0.35$, $\nu_2 = 0.34$, $G_1 / G_0 = 0.43$, $G_2 / G_0 = 0.32$, $\alpha_1^{\nu_1} / \alpha_0^{\nu_0} = 1.68$, $\alpha_2^{\nu_2} / \alpha_0^{\nu_0} = 1.95$, $k_1 / k_0 = 1.88$, $k_2 / k_0 = 4.61$.

У подальшому будемо користуватися такими позначеннями: $\sigma_r^{*(j)} = k_j \sigma_r^{(j)} / (2G_0 \alpha_j^{\nu_j} R_j^2 \rho_j)$, $\sigma_\theta^{*(j)} = k_j \sigma_\theta^{(j)} / (2G_0 \alpha_j^{\nu_j} R_j^2 \rho_j)$, де $\sigma_r^{(j)}$, $\sigma_\theta^{(j)}$ – компоненти тензора напружень, записані в системі координат з початком у точці O_j . Результати комп'ютерного експерименту наведено на рисунках 5.1 – 5.4 і в таблиці 5.1. Геометрія взаємного розташування включень на всіх рисунках визначається

умовами: $R_1 / z_{12} = 0.2$, $R_2 / z_{12} = 0.6$, а густини джерел тепла вважаються сталими з відношенням $\rho_1 / \rho_2 = k_1 / k_2$.

На рисунку 5.1 показано графіки розподілу зведених (фізично безрозмірних) напружень $\sigma_r^{*(1)}$ на сферичних поверхнях $r_1 = a$, де $a = 1.5 R_1, 1.25 R_1, R_1, 0.75 R_1, 0.5 R_1, 0.25 R_1$ в залежності від кута θ . Природно, що всі напруження є стискальними, причому максимального за модулем значення вони досягають на осі біля другого включення. Характерно, що практично при всіх θ напруження за модулем зростають при зменшенні параметра a . На рисунку 5.2 аналогічні графіки наведено для напруження $\sigma_r^{*(2)}$ на сферичних поверхнях $r_2 = a$, де $a = 1.25 R_2, 1.1 R_2, R_2, 0.75 R_2, 0.5 R_2, 0.25 R_2$. Через значно більший радіус другого включення розподіл напружень на ньому є близьким до рівномірного всюди, крім області біля осі в околі першого включення, де спостерігається зростання їх модулів.

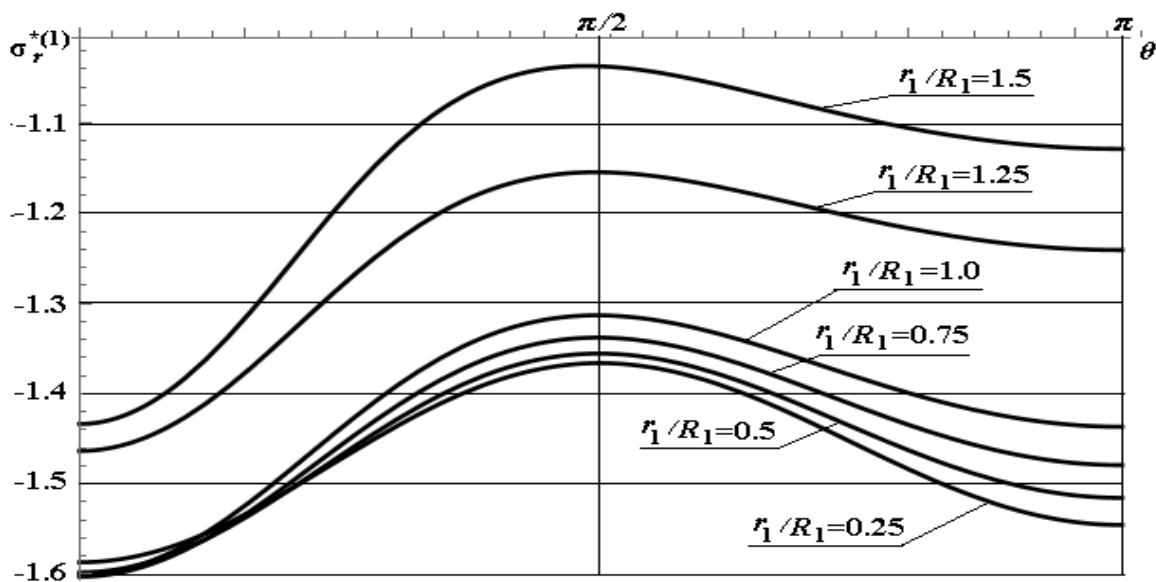


Рисунок 5.1 – Напруження $\sigma_r^{*(1)}$ на поверхнях $r_1 = \text{const}$ для $R_1 / z_{12} = 0.2$,
 $R_2 / z_{12} = 0.6$

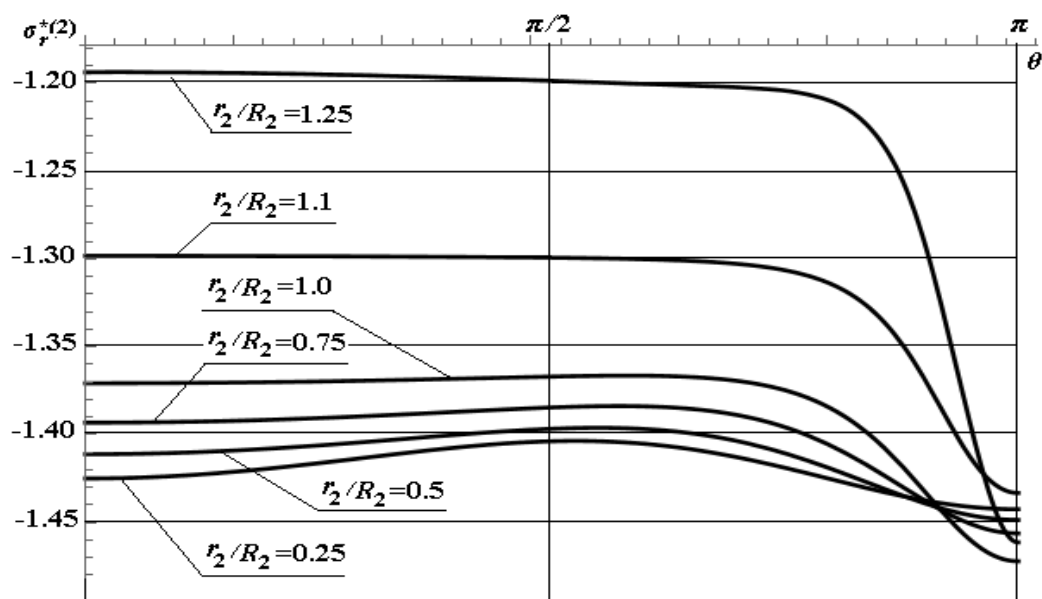


Рисунок 5.2 – Напруження $\sigma_r^{*(2)}$ на поверхнях $r_2 = const$ для $R_1 / z_{12} = 0.2$,
 $R_2 / z_{12} = 0.6$

Графіки напружень $\sigma_\theta^{*(j)}$ на поверхнях $r_j = a$ зображено на рисунках 5.3, 5.4. Для них характерним є стрибок на поверхнях включень $r_j = R_j$. Тут верхня крива відповідає напруженню в матриці, а нижня – у включенні.

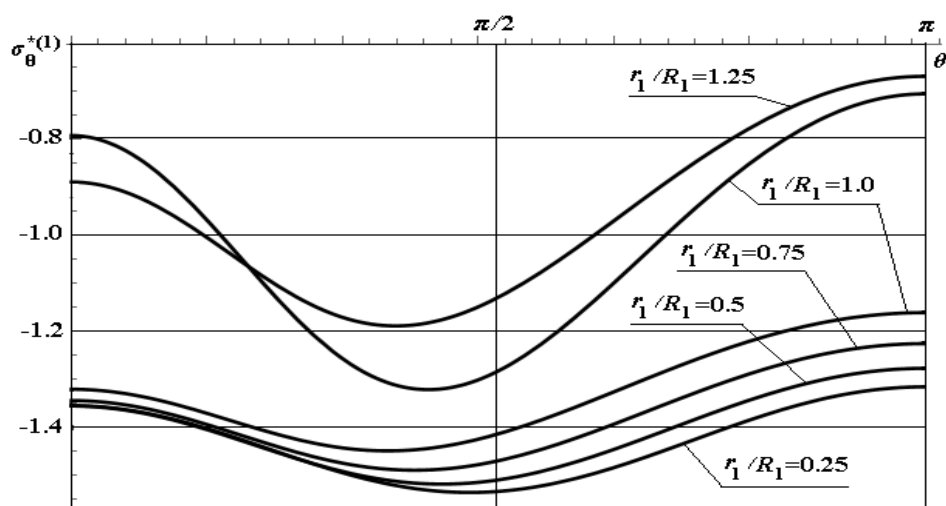


Рисунок 5.3 – Напруження $\sigma_\theta^{*(1)}$ на поверхнях $r_1 = const$ для $R_1 / z_{12} = 0.2$,
 $R_2 / z_{12} = 0.6$

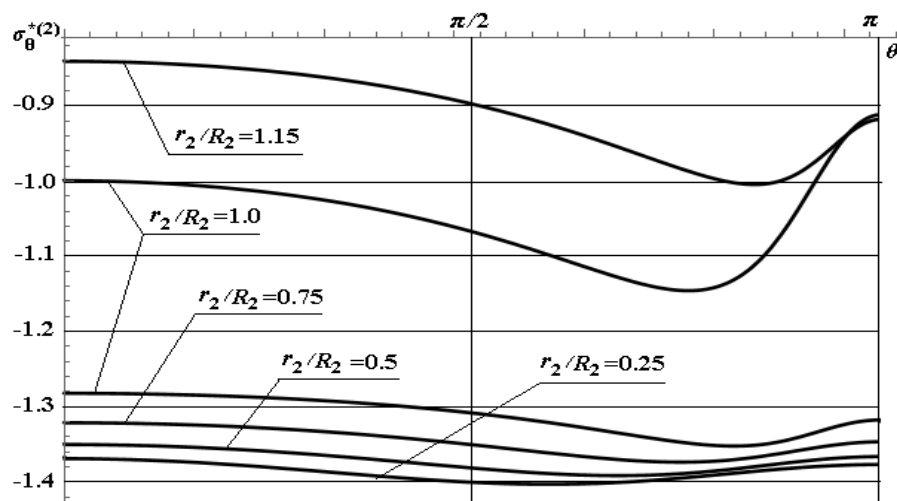


Рисунок 5.4 – Напруження $\sigma_{\theta}^{*(2)}$ на поверхнях $r_2 = const$ для $R_1 / z_{12} = 0.2$,
 $R_2 / z_{12} = 0.6$

Зауважимо, що характер розподілу напружень (але не їх числові значення) мало залежать від відносних розмірів включень при сталій відносній відстані між ними. Про це свідчить рисунок 5.5 де для прикладу наведено графіки напружень $\sigma_{\theta}^{*(1)}$ для протилежної геометрії включень $R_1 / z_{12} = 0.6$, $R_2 / z_{12} = 0.2$. Помітно, що в цьому випадку кути, при яких напруження досягають максимальних за модулем значень, зсуваються в область менших значень в порівнянні з напруженнями з рисунку 5.3.

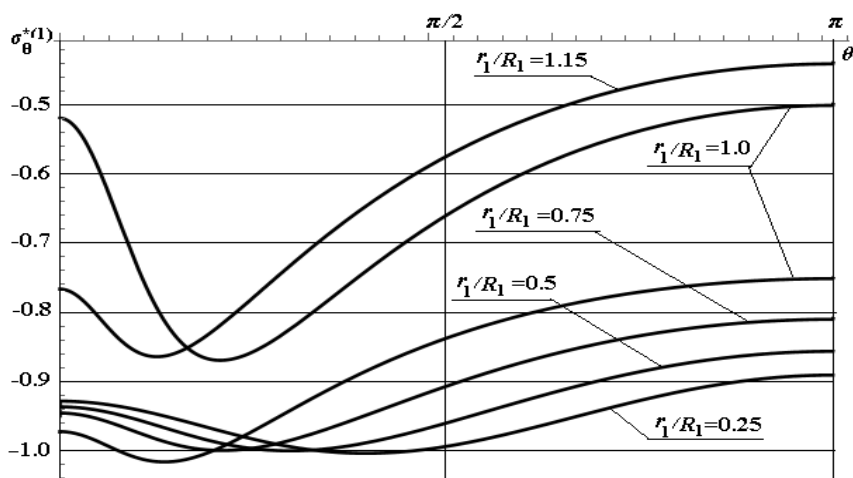


Рисунок 5.5 – Напруження $\sigma_{\theta}^{*(1)}$ на поверхнях $r_1 = const$ для $R_1 / z_{12} = 0.6$,
 $R_2 / z_{12} = 0.2$

5.5 Висновки розділу 5.

В роботі на прикладі розв'язання стаціонарної вісесиметричної термopужної задачі для простору з двома сферичними включеннями, які виділяють тепло, розроблено високоефективний метод дослідження подібних задач для багатокомпонентних механічних систем з тепловиділенням. Запропонований підхід засновано на подальшому розвитку узагальненого методу Фур'є [74] на розглянутий клас задач. Підкреслимо, що на відміну від робіт [96, 97], де автори користуються іншим методом, який дозволяє розв'язати подібні задачі в окремих випадках матеріалів включень (термічні включення) і при сталій густині теплових джерел, метод даної роботи не має подібних обмежень. Метод строго обґрунтований. Як додатковий важливий факт, необхідний для обґрунтування, вперше отримано оцінку знизу модуля багатопараметричного визначника задачі спряження двофазної системи простір – включення, тобто фактично вперше строго обґрунтовано існування розв'язку такої задачі звичайним методом Фур'є. Ефективність методу полягає в тому, що вихідну задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з фредгольмовим оператором у гільбертовому просторі нескінченних послідовностей, сумовних з квадратом. Відомо, що такі системи чисельно коректно розв'язуються методом редукції. Чисельний експеримент показав, що навіть для відносної відстані між включеннями 0.2 при параметрі редукції $n_{\max} = 10$ (розмір редукованої системи 88×88) точність обчислення напружень складає 3-6 вірних значущих цифр після точки. Запропонований метод допускає розвиток на багатокомпонентні тіла іншої геометрії.

РОЗДІЛ 6

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИМ СТАНОМ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА ЗА ДОПОМОГОЮ СТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

6.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимального керування напружено-деформованим станом кусково-однорідного пружного простору за допомогою температурного поля. Вважаємо, що в просторі Ω розташовані сферичне включення Ω_1 і сферична порожнина Ω_2 , центри яких знаходяться в точках O_1 і O_2 ($|\overrightarrow{O_1O_2}| = z_{12}$). Радіуси включення і порожнини дорівнюють R_1 і R_2 відповідно ($R_1 + R_2 < z_{12}$), а їх межі позначимо Γ_1 і Γ_2 . Двофазна система (Ω_0, Ω_1) ($\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$) має термомеханічні характеристики $(G_j, \nu_j, \alpha_j, k_j)$ ($j = 0; 1$), де G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного температурного розширення, k – коефіцієнт теплопровідності.

Потрібно визначити температурне поле в областях Ω_j ($j = 0; 1$) (фактично розподіл температури T_2 на поверхні Γ_2), яке задовольняє такі умови:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{U}_j + \frac{1}{1-2\nu_j} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{U}_j) = \alpha_j \frac{2+2\nu_j}{1-2\nu_j} \vec{\nabla} T_j, \quad \vec{x} \in \Omega_j; \quad (6.1)$$

$$\vec{\nabla}^2 T_j = 0, \quad \vec{x} \in \Omega_j; \quad (6.2)$$

$$T_{0|\Gamma_1} = T_{1|\Gamma_1}, \quad \left(k_0 \frac{\partial T_0}{\partial n_1} \right)_{|\Gamma_1} = \left(k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \right)_{|\Gamma_1}; \quad (6.3)$$

$$(\vec{U}_0)_{|\Gamma_1} = (\vec{U}_1)_{|\Gamma_1}, \quad (F\vec{U}_0)_{|\Gamma_1} = (F\vec{U}_1)_{|\Gamma_1}; \quad (6.4)$$

$$(F\vec{U}_0)_{|\Gamma_2} = \vec{f}_{|\Gamma_2}, \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{|\Gamma_1|} \int_{\Gamma_1} |F\vec{U}_0|^2 ds \rightarrow \min, \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} T_2^2 ds = T^2. \quad (6.7)$$

Тут через T_j, \vec{U}_j ($j = 0; 1$) позначено температурне поле і поле переміщень в областях Ω_j , $F\vec{U}_j$ – вектор напружень на поверхнях включення або порожнини, відповідний вектору переміщень \vec{U}_j , \vec{f} – задана вектор-функція, $\vec{\nabla}$ – оператор набла, \vec{n}_1 – одиничний вектор нормалі до поверхні Γ_1 , $|\Gamma_j|$ – площа поверхні Γ_j , T – задана константа.

Уведемо дві однаково напрямлені сферичні системи координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ ($j = 1; 2$), початки яких сумістимо з точками O_j , а вісь Oz має напрямок вектора $\overrightarrow{O_1O_2}$. Їх координати зв'язані формулами

$$r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2; \quad r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2 + z_{12}.$$

У введених координатах поверхня Γ_j має рівняння $r_j = R_j$. Будемо вважати, що векторна функція \vec{f} має осеву симетрію і зображується абсолютно і рівномірно збіжним рядом виду

$$\vec{f}(\theta_2) = 2G_0 \sum_{n=0}^{\infty} [f_n^{(1)} P_n(\cos \theta_2) \vec{e}_{r_2} + f_n^{(2)} P_n^1(\cos \theta_2) \vec{e}_{\theta_2}],$$

де $P_n^m(x)$ – функції Лежандра першого роду, $\{\vec{e}_{r_j}, \vec{e}_{\theta_j}\}$ – базисні орти сферичної системи координат з початком O_j .

Через осеву симетрію задачі температуру T_2 на поверхні Γ_2 будемо шукати у вигляді

$$T_{2|\Gamma_2} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(2)} P_n(\cos \theta_2). \quad (6.8)$$

Отже, розв'язком задачі (6.1) – (6.6) є набір коефіцієнтів $\{g_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$. Умова (6.7) показує, що функція $T_2(\theta_2)$ повинна належати класу $L_2(\Gamma_2)$.

Спершу вважатимемо, що температуру (6.8) задано, а необхідно знайти температурне поле і термopружні переміщення в областях (Ω_0, Ω_1) в задачі (6.1) – (6.5).

6.2 Розв'язання задачі (6.2), (6.3), (6.8)

Розв'яжемо задачу (6.2), (6.3), (6.8) для рівняння теплопровідності. Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$T_0(\vec{x}) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} R_j^{n+1} w_n^+(r_j, \theta_j), \quad \vec{x} \in \Omega_0; \quad (6.9)$$

$$T_1(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(1)} R_1^{-n} w_n^-(r_1, \theta_1), \quad \vec{x} \in \Omega_1 \quad (6.10)$$

з невідомими коефіцієнтами $\{t_n^{(j)}\}_{n=0, j=1}^{\infty, 2}$, $\{g_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$.

Використаємо теореми додавання функцій (2.2), а саме (2.66), для запису розв'язку (6.9) в системі координат з початком у точці O_j ($j = 1, 2$)

$$T_0(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(j)} \left(\frac{R_j}{r_j} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_j}{R_j} \right)^n P_n(\cos \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(j)} t_k^{(3-j)}, \quad (6.11)$$

де

$$u_{n,k}^{(j)} = h_{n,k}^{(j)} \omega_{n,k+1}^{(j)}, \quad \omega_{n,k}^{(j)} = \left(\frac{R_j}{z_{12}} \right)^n \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^k.$$

Задовольняючи умови спряження теплових полів $T_0(\vec{x})$ і $T_1(\vec{x})$, а також граничну умову (6.8), отримаємо

$$t_n^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1)} t_k^{(2)} = g_n^{(1)}, \quad n = 0 \div \infty; \quad (6.12)$$

$$-(n+1)t_n^{(1)} + n \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1)} t_k^{(2)} = \frac{k_1}{k_0} n g_n^{(1)}, \quad (6.13)$$

$$n = 0 \div \infty;$$

$$t_n^{(2)} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(2)} t_k^{(1)} = g_n^{(2)}, \quad n = 0 \div \infty. \quad (6.14)$$

Після вилучення невідомих $\{g_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ з системи (6.12), (6.13) відносно $\{t_n^{(j)}\}_{n=0, j=1}^{\infty, 2}$ випливає розв'язувальна система

$$t_n^{(1)} - \gamma_n \sum_{s=0}^{\infty} t_s^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1)} u_{k,s}^{(2)} = -\gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1)} g_k^{(2)}, \quad (6.15)$$

$$n = 0 \div \infty;$$

$$t_n^{(2)} - \sum_{s=0}^{\infty} t_s^{(2)} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u_{n,k}^{(2)} u_{k,s}^{(1)} = g_n^{(2)}, \quad (6.17)$$

$$n = 0 \div \infty,$$

де $\gamma_n = \frac{(k_1 - k_0)n}{k_1 n + k_0(n+1)}.$

Теорема 6.1. За умови $z_{12} > R_1 + R_2$ оператори системи є фредгольмовими операторами у просторі l_2 .

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати збіжність подвійних рядів

$$\sum_{n,s=0}^{\infty} \left(\gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1)} u_{k,s}^{(2)} \right)^2, \quad \sum_{n,s=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u_{n,k}^{(2)} u_{k,s}^{(1)} \right)^2.$$

Оскільки $|\gamma_n| < 1$, то, застосовуючи нерівність Гельдера, отримаємо

$$\sum_{n,s=0}^{\infty} \left(\gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1)} u_{k,s}^{(2)} \right)^2 < \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}^{(1)}|^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |u_{k,s}^{(2)}|^2.$$

При виконанні умови теореми збіжність рядів у правій частині нерівності випливає з існування точної суми ряду

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} |u_{n,k}^{(j)}| = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} \left(\frac{R_{3-j}}{z_{12}} \right)^k \left(\frac{R_j}{z_{12}} \right)^n = \frac{z_{12}}{z_{12} - R_1 - R_2}.$$

Аналогічно доводиться збіжність другого подвійного ряду.

З умови $\{g_n^{(2)}\}_{n=0}^\infty \in l_2$ так само випливає, що

$$\left(\gamma_n \sum_{k=0}^\infty u_{n,k}^{(1)} g_k^{(2)} \right)_{n=0}^\infty \in l_2,$$

і тоді попередня теорема разом з еквівалентністю задачі (6.2), (6.3), (6.8) розв'язувальним системам (6.15), (6.16) (її можна довести) обґрунтовує існування коректного розв'язку систем (6.15), (6.16) у просторі l_2 . Тоді формули (6.9), (6.10), (6.12) відновлюють температурне поле $(T_0(\vec{x}), T_1(\vec{x}))$ у двофазному тілі (Ω_0, Ω_1) .

6.3 Розв'язання прямої задачі (6.1), (6.4), (6.5)

Тепер розглянемо термопружну задачу (6.1), (6.4), (6.5), яка відповідає побудованому вище температурному полю в області (Ω_0, Ω_1) . Для цього скористаємось доведеними в розділі 2 результатами. Розглянемо в областях Ω^\pm систему базисних вісесиметричних розв'язків рівняння Ламе (однорідне рівняння (6.1)) $\{\vec{W}_{1,n}^\pm(r, \theta)\}_{n=1}^\infty, \vec{W}_{2,n}^\pm(r, \theta)\}_{n=0}^\infty$, де (2.4) (2.5) базисні розв'язки.

Для цих вектор-функцій в системах координат з початками O_j в розділі 2 доведено теореми додавання 2.3 ($r_{3-j} < z_{12}$, $j=1,2$).

Як відомо, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (6.1) в області Ω_j ($j=0;1$) можна записати в такому вигляді:

$$\vec{U}_j(\vec{x}) = \vec{U}_j^G(\vec{x}) + \vec{U}_j^T(\vec{x}), \quad (6.17)$$

де $\vec{U}_j^G(\vec{x})$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $\vec{U}_j^T(\vec{x})$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (далі називається вектором термічних переміщень). Завдяки базисності розв'язків (2.4, 2.5) в областях Ω^\pm загальний розв'язок однорідного рівняння в областях (Ω_0, Ω_1) можна записати, як (5.12) та (5.13).

В розділі 5 показано, що температурному полю $T_0(\vec{x})$ відповідає вектор термічних переміщень(5.14). Так само можна довести, що температурному полю $T_1(\vec{x})$ відповідає такий вектор термічних переміщень:

$$\vec{U}_1^T(\vec{x}) = \alpha_1^{\nu_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n^{(1)}}{2n+3} R_1^{-n} \vec{V}_n^-(r_1, \theta_1), \quad \vec{x} \in \Omega_1, \quad (6.18)$$

$$\text{де } \alpha_1^{\nu_1} = \frac{\alpha_1}{2} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}.$$

Формули (2.68) – (2.70) дають змогу записати вектор-функцію $\vec{U}_0(\vec{x})$ в сферичній системі координат з початком у точці O_j

$$\begin{aligned} \vec{U}_0(r_j, \theta_j) = & \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(j)} R_j^{n+3} \vec{W}_{1,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+3} a_{1,k}^{(3-j)} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(j)} R_j^{n+1} \vec{W}_{2,n}^+(r_j, \theta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k-1}} \gamma_{k,n}^{(1)} R_{3-j}^{k+1} a_{2,k}^{(3-j)} - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{2,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} \gamma_{k,n}^{(2)} R_{3-j}^{k+1} a_{2,k}^{(3-j)} - \alpha_0^{\nu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n^{(j)}}{2n-1} R_j^{n+1} \vec{V}_n^+(r_j, \theta_j) - \\ & - \alpha_0^{\nu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^-(r_j, \theta_j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k-1}} \frac{\lambda_{n,k}^{(1)}}{2n-1} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)} + \alpha_0^{\nu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{V}_n^-(r_j, \theta_j)}{2n+3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{n,k}^{(j)}}{z_{12}^{n+k+1}} R_{3-j}^{k+1} t_k^{(3-j)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Переходячи в переміщеннях (6.13), (6.18), (6.19) до вектора напружень на поверхні Γ_j і виконуючи умови спряження (6.4) і граничну умову (6.5), приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\{a_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i,j=1}^{\infty,2}$, $\{b_{i,n}^{(1)}\}_{n=0,i=1}^{\infty,2}$

$$\begin{aligned} n b_{1,n}^{(1)} + \beta_{1,n}^{-(1)} b_{2,n}^{(1)} = & -(n+1) a_{1,n}^{(1)} + \beta_{1,n}^{+(0)} a_{2,n}^{(1)} + n \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,1)} a_{1,k}^{(2)} + \sum_{k=0}^{\infty} [n u_{n,k}^{(2,1)} - \beta_{1,n}^{-(0)} u_{n,k}^{(3,1)}] a_{2,k}^{(2)} + \\ & + \alpha_0^{\nu_0} \frac{n-1}{2n-1} t_n^{(1)} - \alpha_1^{\nu_1} \frac{n+2}{2n+3} g_n^{(1)} + \alpha_0^{\nu_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2}{2n+3} u_{n,k}^{(5,1)} - n u_{n,k}^{(4,1)} \right] t_k^{(2)}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$b_{1,n}^{(1)} + \beta_{2,n}^{-(1)} b_{2,n}^{(1)} = a_{1,n}^{(1)} + \beta_{2,n}^{+(0)} a_{2,n}^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,1)} a_{1,k}^{(2)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{\infty} [u_{n,k}^{(2,1)} - \beta_{2,n}^{-(0)} u_{n,k}^{(3,1)}] a_{2,k}^{(2)} - \alpha_0^{v_0} \frac{t_n^{(1)}}{2n-1} + \\
& + \alpha_0^{v_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{u_{n,k}^{(5,1)}}{2n+3} - u_{n,k}^{(4,1)} \right] t_k^{(2)} - \alpha_1^{v_1} \frac{g_n^{(1)}}{2n+3}, \tag{6.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+2)(n+1)a_{1,n}^{(1)} + \rho_{1,n}^{+(0)} a_{2,n}^{(1)} + n(n-1) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,1)} a_{1,k}^{(2)} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} [n(n-1)u_{n,k}^{(2,1)} - \rho_{1,n}^{-(0)} u_{n,k}^{(3,1)}] a_{2,k}^{(2)} - \alpha_0^{v_0} \left[2 + \frac{n(n-1)}{2n-1} \right] t_n^{(1)} + \\
& + \alpha_0^{v_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} - 2 \right] u_{n,k}^{(5,1)} - n(n-1)u_{n,k}^{(4,1)} \right\} t_k^{(2)} = \\
& = \frac{G_1}{G_0} n(n-1)b_{1,n}^{(1)} + \frac{G_1}{G_0} \rho_{1,n}^{-(1)} b_{2,n}^{(1)} + \frac{G_1}{G_0} \alpha_1^{v_1} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} - 2 \right] g_n^{(1)}, \tag{6.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(n+2)a_{1,n}^{(1)} + \rho_{2,n}^{+(0)} a_{2,n}^{(1)} + (n-1) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,1)} a_{1,k}^{(2)} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} [(n-1)u_{n,k}^{(2,1)} - \rho_{2,n}^{-(0)} u_{n,k}^{(3,1)}] a_{2,k}^{(2)} + \alpha_0^{v_0} \frac{n}{2n-1} t_n^{(1)} + \\
& + \alpha_0^{v_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+1}{2n+3} u_{n,k}^{(5,1)} - (n-1)u_{n,k}^{(4,1)} \right] t_k^{(2)} = \\
& = \frac{G_1}{G_0} (n-1)b_{1,n}^{(1)} + \frac{G_1}{G_0} \rho_{2,n}^{-(1)} b_{2,n}^{(1)} + \frac{G_1}{G_0} \alpha_1^{v_1} \frac{n+1}{2n+3} g_n^{(1)}, \tag{6.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+2)(n+1)a_{1,n}^{(2)} + \rho_{1,n}^{+(0)} a_{2,n}^{(2)} + n(n-1) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,2)} a_{1,k}^{(1)} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} [n(n-1)u_{n,k}^{(2,2)} - \rho_{1,n}^{-(0)} u_{n,k}^{(3,2)}] a_{2,k}^{(1)} - \alpha_0^{v_0} \left[2 + \frac{n(n-1)}{2n-1} \right] t_n^{(2)} + \\
& + \alpha_0^{v_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} - 2 \right] u_{n,k}^{(5,2)} - n(n-1)u_{n,k}^{(4,2)} \right\} t_k^{(1)} = f_n^{(1)}, \tag{6.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(n+2)a_{1,n}^{(2)} + \rho_{2,n}^{+(0)} a_{2,n}^{(2)} + (n-1) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,2)} a_{1,k}^{(1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{\infty} [(n-1)u_{n,k}^{(2,2)} - \rho_{2,n}^{-(0)} u_{n,k}^{(3,2)}] a_{2,k}^{(1)} + \alpha_0^{v_0} \frac{n}{2n-1} t_n^{(2)} + \\
& + \alpha_0^{v_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+1}{2n+3} u_{n,k}^{(5,2)} - (n-1)u_{n,k}^{(4,2)} \right] t_k^{(1)} = f_n^{(2)}. \quad (6.25)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\beta_{1,n}^{+(j)} &= -n(n+3-4v_j), \quad \beta_{1,n}^{-(j)} = (n+1)(n+4v_j-2), \\
\beta_{2,n}^{+(j)} &= n+4v_j-4, \quad \beta_{2,n}^{-(j)} = n+5-4v_j, \\
\rho_{1,n}^{+(j)} &= n(n^2+3n-2v_j), \quad \rho_{1,n}^{-(j)} = (n+1)(n^2-n-2v_j-2), \\
\rho_{2,n}^{+(j)} &= -(n^2+2v_j-2), \quad \rho_{2,n}^{-(j)} = n^2+2n+2v_j-1, \\
u_{n,k}^{(1,j)} &= h_{n,k}^{(j)} \omega_{n-2,k+3}^{(j)}, \quad u_{n,k}^{(2,j)} = h_{n,k}^{(j)} \gamma_{k,n}^{(1)} \omega_{n-2,k+1}^{(j)}, \\
u_{n,k}^{(3,j)} &= h_{n,k}^{(j)} \gamma_{k,n}^{(2)} \omega_{n,k+1}^{(j)}, \quad u_{n,k}^{(4,j)} = h_{n,k}^{(j)} \lambda_{n,k} \omega_{n-2,k+1}^{(j)}, \\
u_{n,k}^{(5,j)} &= h_{n,k}^{(j)} \omega_{n,k+1}^{(j)}, \quad \lambda_{n,k} = \frac{2nk-n-k}{(n+k)(2k-1)(2n-1)}
\end{aligned}$$

Після виключення невідомих $\{b_{i,n}^{(1)}\}_{n=0,i=1}^{\infty,2}$ з рівнянь (6.20) – (6.23) отримаємо систему відносно $\{a_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i,j=1}^{\infty,2}$

$$\begin{aligned}
d_n^{(j,1)} a_{1,n}^{(1)} + d_n^{(j,2)} a_{2,n}^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}^{(j,1,1)} a_{1,k}^{(2)} + \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}^{(j,2,1)} a_{2,k}^{(2)} = \\
= -m_{t,n}^{(j,1)} \bar{t}_n^{(1)} - \sum_{k=0}^{\infty} m_{t,n,k}^{(j,2)} \bar{t}_k^{(2)} + \xi_{g,n}^{(j)} \bar{g}_n^{(1)}, \quad (6.26)
\end{aligned}$$

$$\gamma_n^{(j,1)} a_{1,n}^{(2)} + \gamma_n^{(j,2)} a_{2,n}^{(2)} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k}^{(j,1,2)} a_{1,k}^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k}^{(j,2,2)} a_{2,k}^{(1)} = f_n^{(j)} - \gamma_{t,n}^{(j,2)} \bar{t}_n^{(2)} - \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{t,n,k}^{(j,1)} \bar{t}_k^{(1)}, \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned}
b_{1,n}^{(1)} &= \mathcal{G}_n^{(1,1)} a_{1,n}^{(1)} + \mathcal{G}_n^{(1,2)} a_{2,n}^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,1)} a_{1,k}^{(2)} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{n,k}^{(1)} a_{2,k}^{(2)} + \\
& + \sigma_{t,n}^{(1)} \bar{t}_n^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{t,n,k}^{(1)} \bar{t}_k^{(2)} + \sigma_{g,n}^{(1)} \bar{g}_n^{(1)}, \quad (6.28)
\end{aligned}$$

$$b_{2,n}^{(1)} = \mathcal{G}_n^{(2,1)} a_{1,n}^{(1)} + \mathcal{G}_n^{(2,2)} a_{2,n}^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{n,k}^{(2)} a_{2,k}^{(2)} + \sigma_{t,n}^{(2)} \bar{t}_n^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{t,n,k}^{(2)} \bar{t}_k^{(2)} + \sigma_{g,n}^{(2)} \bar{g}_n^{(1)}, \quad (6.29)$$

$$j=1,2; \quad n=0 \div \infty,$$

де

$$\begin{aligned}
d_n^{(i,k)} &= \gamma_n^{(i,k)} - \xi_n^{(i,k)}, \quad m_{n,k}^{(i,j,1)} = \gamma_{n,k}^{(i,j,1)} - \xi_{n,k}^{(i,j,1)}, \\
m_{t,n}^{(i,k)} &= \gamma_{t,n}^{(i,k)} - \xi_{t,n}^{(i,k)}, \quad m_{t,n,k}^{(j,2)} = \gamma_{t,n,k}^{(j,2)} - \xi_{t,n,k}^{(j,2)}, \\
\gamma_n^{(1,1)} &= (n+2)(n+1), \quad \gamma_{n,k}^{(1,1,j)} = n(n-1)u_{n,k}^{(1,j)}, \\
\gamma_n^{(1,2)} &= \rho_{1,n}^{+(0)}, \quad \gamma_{n,k}^{(1,2,j)} = n(n-1)u_{n,k}^{(2,j)} - \rho_{1,n}^{-(0)}u_{n,k}^{(3,j)}, \\
\gamma_{t,n}^{(1,j)} &= -\left[2 + \frac{n(n-1)}{2n-1}\right], \quad \gamma_{t,n,k}^{(1,j)} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} - 2\right]u_{n,k}^{(5,j)} - n(n-1)u_{n,k}^{(4,j)}, \\
\gamma_n^{(2,1)} &= -(n+2), \quad \gamma_n^{(2,2)} = \rho_{2,n}^{+(0)}, \quad \gamma_{n,k}^{(2,1,j)} = (n-1)u_{n,k}^{(1,j)}, \\
\gamma_{n,k}^{(2,2,j)} &= (n-1)u_{n,k}^{(2,j)} - \rho_{2,n}^{-(0)}u_{n,k}^{(3,j)}, \quad \gamma_{t,n}^{(2,j)} = \frac{n}{2n-1}, \quad \gamma_{t,n,k}^{(2,j)} = \frac{n+1}{2n+3}u_{n,k}^{(5,j)} - (n-1)u_{n,k}^{(4,j)}, \\
\xi_n^{(1,1)} &= \frac{G_1}{G_0} \left[n(n-1) + (2n+1)\mu_{1,n} \right], \quad \xi_n^{(1,2)} = \frac{G_1}{G_0} n \left[(n-1)\beta_{2,n}^{+(0)} + (2n-1)\mu_{1,n} \right], \\
\xi_n^{(2,1)} &= \frac{G_1}{G_0} \left[n-1 + (2n+1)\mu_{2,n} \right], \quad \xi_n^{(2,2)} = \frac{G_1}{G_0} \left[(n-1)\beta_{2,n}^{+(0)} + n(2n-1)\mu_{2,n} \right], \\
\xi_{n,k}^{(1,1,1)} &= \frac{G_1}{G_0} n(n-1)u_{n,k}^{(1,1)}, \quad \xi_{n,k}^{(1,2,1)} = \frac{G_1}{G_0} \left\{ n(n-1)u_{n,k}^{(2,1)} - \right. \\
&\quad \left. - \left[n(n-1)\beta_{2,n}^{-(0)} + \mu_{1,n}\Delta_n^{-(0)} \right] u_{n,k}^{(3,1)} \right\}, \\
\xi_{t,n}^{(1,1)} &= -\frac{G_1}{G_0} \left[\frac{n(n-1)}{2n-1} + \mu_{1,n} \right], \\
\xi_{t,n,k}^{(1,2)} &= -\frac{G_1}{G_0} \left\{ n(n-1)u_{n,k}^{(4,1)} - \frac{1}{2n+3} \left[n(n-1) - 2\mu_{1,n} \right] u_{n,k}^{(5,1)} \right\}, \\
\xi_{g,n}^{(1)} &= \frac{G_1}{G_0} \frac{2}{2n+3} \left[\mu_{1,n} - 2 \right], \quad \xi_{n,k}^{(2,1,1)} = \frac{G_1}{G_0} (n-1)u_{n,k}^{(1,1)}, \\
\xi_{n,k}^{(2,2,1)} &= \frac{G_1}{G_0} \left\{ (n-1)u_{n,k}^{(2,1)} - \left[(n-1)\beta_{2,n}^{-(0)} + \mu_{2,n}\Delta_n^{-(0)} \right] u_{n,k}^{(3,1)} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{t,n}^{(2,1)} &= -\frac{G_1}{G_0} \left[\frac{n-1}{2n-1} + \mu_{2,n} \right], \quad \xi_{t,n,k}^{(2,2)} = \frac{G_1}{G_0} \left\{ \left[\frac{n-1-2\mu_{2,n}}{2n+3} \right] u_{n,k}^{(5,1)} - (n-1)u_{n,k}^{(4,1)} \right\}, \\
\xi_{g,n}^{(2)} &= \frac{G_1}{G_0} \frac{2}{2n+3} [1 + \mu_{2,n}], \quad \mu_{2,n} = \frac{\rho_{2,n}^{-(1)} - (n-1)\beta_{2,n}^{-(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}, \quad \bar{t}_n^{(j)} = \alpha_0^{\nu_0} t_n^{(j)}, \\
\mu_{1,n} &= \frac{\rho_{1,n}^{-(1)} - n(n-1)\beta_{2,n}^{-(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}, \quad \bar{g}_n^{(1)} = \alpha_1^{\nu_1} g_n^{(1)}, \quad \Delta_n^{-(j)} = 2[(3-4\nu_j)n+1-2\nu_j], \\
g_n^{(1,1)} &= 1 - \frac{(2n+1)\beta_{2,n}^{-(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}, \quad g_n^{(1,2)} = \beta_{2,n}^{+(0)} - \frac{n(2n-1)\beta_{2,n}^{-(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}, \\
\psi_{n,k}^{(1)} &= u_{n,k}^{(2,1)} - \left[\beta_{2,n}^{-(0)} - \beta_{2,n}^{-(1)} \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} \right] u_{n,k}^{(3,1)}, \\
\sigma_{t,n}^{(1)} &= \left[\frac{\beta_{2,n}^{-(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} - \frac{1}{2n-1} \right], \quad \sigma_{g,n}^{(1)} = \frac{-1}{2n+3} \left[1 + \frac{2\beta_{2,n}^{-(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \right], \\
\psi_{t,n,k}^{(1)} &= \left[1 + \frac{2\beta_{2,n}^{-(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \right] \frac{u_{n,k}^{(5,1)}}{(2n+3)} - u_{n,k}^{(4,1)}, \\
g_n^{(2,1)} &= \frac{2n+1}{\Delta_n^{-(1)}}, \quad g_n^{(2,2)} = \frac{n(2n-1)}{\Delta_n^{-(1)}}, \quad \psi_{n,k}^{(2)} = -\frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} u_{n,k}^{(3,1)}, \\
\sigma_{t,n}^{(2)} &= -\frac{1}{\Delta_n^{-(1)}}, \quad \sigma_{g,n}^{(2)} = \frac{2}{(2n+3)\Delta_n^{-(1)}}, \quad \bar{g}_n^{(2)} = \alpha_0^{\nu_0} g_n^{(2)}, \quad \psi_{t,n,k}^{(2)} = -\frac{2u_{n,k}^{(5,1)}}{(2n+3)\Delta_n^{-(1)}}.
\end{aligned}$$

6.4 Аналіз системи (6.37), (6.38)

У гільбертовому просторі l_2 розглянемо лінійні оператори, які задаються нескінченними матрицями

$$\begin{aligned}
D_{ik}^{(1)} &= \text{diag}(d_n^{(i,k)})_{n=0}^\infty, \quad D_{ik}^{(2)} = \text{diag}(\gamma_n^{(i,k)})_{n=0}^\infty, \quad i, k = 1, 2, \\
M_{sr}^{(1)} &= (m_{n,k}^{(s,r,1)})_{n,k=0}^\infty, \quad M_{sr}^{(2)} = (\gamma_{n,k}^{(s,r,2)})_{n,k=0}^\infty, \quad s, r = 1, 2; \\
M_{t,j}^{(1,1)} &= \text{diag}(m_{t,n}^{(j,1)})_{n=0}^\infty, \quad M_{t,j}^{(2,2)} = \text{diag}(\gamma_{t,n}^{(j,2)})_{n=0}^\infty, \\
M_{t,j}^{(1,2)} &= (m_{t,n,k}^{(j,1)})_{n,k=0}^\infty, \quad M_{t,j}^{(2,1)} = (\gamma_{t,n,k}^{(j,2)})_{n,k=0}^\infty, \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

$$\Xi_g^{(j)} = \text{diag}(\xi_{g,n}^{(j)})_{n=0}^\infty.$$

Позначимо $l_2^4 = l_2 \times l_2 \times l_2 \times l_2$ – декартовий добуток чотирьох екземплярів простору l_2 . Простір l_2^4 є гільбертовим простором з елементами $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $x_i \in l_2$ (тут символ T означає транспонування, тобто вектор x є символічним стовпцем, складеним з чотирьох нескінченних послідовностей) і скалярним добутком

$$(x, y) = \sum_{i=1}^4 (x_i, y_i) \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^4{}^T, y = (y_i)_{i=1}^4{}^T.$$

Нехай

$$a = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)})^T,$$

$$f_t = (f_t^{(1,1)}, f_t^{(2,1)}, f_t^{(1,2)}, f_t^{(2,2)})^T$$

де

$$a_i^{(j)} = (a_{i,n}^{(j)})_{n=0}^\infty, \quad i, j = 1, 2;$$

$$f_t^{(j,1)} = -M_{t,j}^{(1,1)} \bar{t}^{(1)} - M_{t,j}^{(1,2)} \bar{t}^{(2)} + \Xi_g^{(j)} \bar{g}^{(1)}, \quad j = 1, 2;$$

$$f_t^{(j,2)} = f_t^{(j)} - M_{t,j}^{(2,1)} \bar{t}^{(1)} - M_{t,j}^{(2,2)} \bar{t}^{(2)}, \quad j = 1, 2;$$

$$\bar{t}^{(j)} = (\bar{t}_n^{(j)})_{n=0}^\infty, \quad f^{(j)} = (f_n^{(j)})_{n=0}^\infty, \quad \bar{g}^{(j)} = (\bar{g}_n^{(j)})_{n=0}^\infty.$$

Розглянемо символічну матрицю

$$\Phi = D + M,$$

де

$$D = \text{diag}(D_1, D_2), \quad M = \begin{pmatrix} 0 & M_1 \\ M_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_j = \begin{pmatrix} D_{11}^{(j)} & D_{12}^{(j)} \\ D_{21}^{(j)} & D_{22}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad M_j = \begin{pmatrix} M_{11}^{(j)} & M_{12}^{(j)} \\ M_{21}^{(j)} & M_{22}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Тепер систему (6.26), (6.27) в попередніх позначеннях можна записати у вигляді

$$\Phi a = f_t. \quad (6.30)$$

Теорема 6.2. При виконанні умов $R_1 + R_2 < z_{12}$, $\nu_j \in (0, 0.5)$, $G_j > 0$ оператор Φ системи (6.30) в просторі l_2^4 є фредгольмовим оператором.

Важливим і принциповим фактом для доведення теореми 2 є наступний новий результат.

Теорема 6.3. Визначник

$$\Delta_n^c = \begin{vmatrix} d_n^{(1,1)} & d_n^{(1,2)} \\ d_n^{(2,1)} & d_n^{(2,2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

при будь-яких $n = 0 \div \infty$, $\nu_j \in (0, 0.5)$, $G_j > 0$. Більш того, виконується оцінка

$$|\Delta_n^c| > (n+2)(2n^2+1). \quad (6.31)$$

Доведення теореми 6.2. Покажемо, що оператор D є неперервно оборотним у просторі l_2^4 . Формальним оберненим оператором для оператора D є оператор

$$D^{-1} = \text{diag}(D_1^{-1}, D_2^{-1}),$$

де

$$D_j^{-1} = \begin{pmatrix} V_{11}^{(j)} & V_{12}^{(j)} \\ V_{21}^{(j)} & V_{22}^{(j)} \end{pmatrix},$$

$$V_{ii}^{(j)} = \left(D_{ii}^{(j)} - D_{i,3-i}^{(j)} \left[D_{3-i,3-i}^{(j)} \right]^{-1} D_{3-i,i}^{(j)} \right), i=1,2,$$

$$V_{i,3-i}^{(j)} = - \left[D_{ii}^{(j)} \right]^{-1} D_{i,3-i}^{(j)} V_{3-i,3-i}^{(j)}, i=1,2.$$

Через діагональність матриць $D_{ik}^{(j)}$ матриці $V_{ik}^{(j)}$ можна записати явно

$$V_{ii}^{(1)} = \text{diag} \left(\frac{d_n^{(3-i,3-i)}}{\Delta_n^c} \right), V_{i,3-i}^{(1)} = -\text{diag} \left(\frac{d_n^{(i,3-i)}}{\Delta_n^c} \right), i=1,2,$$

$$V_{ii}^{(2)} = \text{diag} \left(\frac{\gamma_n^{(3-i,3-i)}}{\Delta_n^{+(0)}} \right), V_{i,3-i}^{(2)} = -\text{diag} \left(\frac{\gamma_n^{(i,3-i)}}{\Delta_n^{+(0)}} \right), i=1,2,$$

$$\Delta_n^{+(0)} = \begin{vmatrix} \gamma_n^{(1,1)} & \gamma_n^{(1,2)} \\ \gamma_n^{(2,1)} & \gamma_n^{(2,2)} \end{vmatrix} = 2(n+2)[n^2 + (1-2\nu_0)n + 1 - \nu_0]. \quad (6.32)$$

Зазначимо, що визначник $\Delta_n^{+(0)} \neq 0$ при будь-яких $n = 0 \div \infty$, $\nu_0 \in (0, 0.5)$, причому для нього виконується оцінка (6.31).

Отже, завдяки попередньому результату і теоремі 6.3 обернена матриця до матриці D існує. Покажемо, що вона задає обмежений оператор, що діє в просторі l_2^4 .

Для будь-якого вектора $x = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)})^T \in l_2^4$ правильною є оцінка

$$\begin{aligned} \|D^{-1}x\|^2 &= \sum_{i,j=1}^2 \|V_{ii}^{(j)}x_i^{(j)} + V_{i,3-i}^{(j)}x_{3-i}^{(j)}\|^2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{i,j=1}^2 (\|V_{ii}^{(j)}x_i^{(j)}\|^2 + \|V_{i,3-i}^{(j)}x_{3-i}^{(j)}\|^2), \end{aligned}$$

причому кожний доданок суми можна оцінити зверху однією з сум

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{d_n^{(i,k)}}{\Delta_n^c} x_{k,n}^{(1)} \right|^2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\gamma_n^{(i,k)}}{\Delta_n^{+(0)}} x_{k,n}^{(2)} \right|^2, \quad i, k = 1, 2.$$

Тут $x_k^{(j)} = (x_{k,n}^{(j)})_{n=0}^{\infty}$. Оскільки послідовності $(d_n^{(i,k)} / \Delta_n^c)_{n=0}^{\infty}$, $(\gamma_n^{(i,k)} / \Delta_n^{+(0)})_{n=0}^{\infty} \in$ обмеженими, то існує додатна стала C , така, що

$$\|D^{-1}x\|^2 \leq C \sum_{i,j=1}^2 (\|x_i^{(j)}\|^2 + \|x_{3-i}^{(j)}\|^2) = C \|x\|^2.$$

Остання нерівність доводить неперервну оборотність оператора D .

Лінійний оператор, який задається символічною матрицею M , є компактним оператором у просторі l_2^4 , що впливає зі збіжності рядів

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} n^s k^r |u_{n,k}^{(i,j)}| < \infty, \quad i = 1 \div 5, \quad j = 1, 2,$$

де s, r – фіксовані цілі числа. Цей результат доводиться так само, як у теоремі 6.1.

Остаточний результат теореми 6.2 тепер впливає з відомої теореми С. М. Нікольського.

Зазначимо, що за умови $f^{(j)}, \bar{g}^{(2)} \in l_2$ неважко показати належність вектора правих частин системи (6.30) простору l_2^4 . Тоді коректна розв'язність системи

(6.30) є наслідком теореми 6.2 і еквівалентності системи (6.30) і вихідної задачі (6.1), (6.4), (6.5).

Зауваження. Результат теореми 6.3 є більш значущим, ніж просто інструмент для доведення теореми 6.2. Фактично вперше строго доведено, що вісесиметрична задача спряження для двофазної системи: пружний простір зі сферичним включенням з іншого матеріалу, має коректний розв'язок звичайним методом Фур'є.

6.5 Зведення задачі оптимального керування до еквівалентної задачі

Перейдемо до розв'язання задачі оптимального керування (6.1) – (6.8). Спершу перетворимо функціонал (6.6). Для цього запишемо вектор напруження на поверхні Γ_1

$$\begin{aligned} F\vec{U}_1 = & 2G_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_{1,n}^{(1)}(n-1)n + b_{2,n}^{(1)}\rho_{1,n}^{-(1)} + \right. \\ & \left. + \left(-2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \right) \bar{g}_n^{(1)} \right] P_n(\cos \theta_1) \vec{e}_{r_1} + \\ & + 2G_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_{1,n}^{(1)}(n-1) + b_{2,n}^{(1)}\rho_{2,n}^{-(1)} + \frac{n+1}{2n+3} \bar{g}_n^{(1)} \right] P_n^1(\cos \theta_1) \vec{e}_{\theta_1}. \end{aligned}$$

Для такого вектора функціонал (6.6) являє собою квадратичну форму на нескінченновимірному просторі числових послідовностей $\{b_{1,n}^{(1)}, b_{2,n}^{(1)}, \bar{g}_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$, які спадають експоненціально

$$J[\bar{g}^{(2)}] = \frac{1}{|\Gamma_1|} \int_{\Gamma_1} |F\vec{U}_0|^2 ds = 2G_1^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^2 \eta_n^{(j,i)} b_{i,n}^{(1)} + \tau_n^{(j)} \bar{g}_n^{(1)} \right]^2, \quad (6.33)$$

де

$$\eta_n^{(1,1)} = \frac{n(n-1)}{\sqrt{n+1/2}}, \quad \eta_n^{(1,2)} = \frac{\rho_{1,n}^{-(1)}}{\sqrt{n+1/2}}, \quad \eta_n^{(2,1)} = (n-1)\sqrt{\frac{2n(n+1)}{2n+1}},$$

$$\eta_n^{(2,2)} = \rho_{2,n}^{-(1)} \sqrt{\frac{2n(n+1)}{2n+1}},$$

$$\tau_n^{(1)} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} - 2 \right) \frac{1}{\sqrt{n+1/2}}, \quad \tau_n^{(2)} = \frac{n+1}{2n+3} \sqrt{\frac{2n(n+1)}{2n+1}}, \quad \bar{g}^{(2)} = (\bar{g}_k^{(2)})_{k=0}^{\infty}.$$

Обмеження на керування (6.7) можна записати так:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{g}_n^{(2)})^2 (n+1/2)^{-1} = (\alpha_0^{v_0})^2 T^2. \quad (6.34)$$

Таким чином, вихідну задачу оптимального керування зведено до еквівалентної задачі, в якій стан об'єкту визначається нескінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь (6.12), (6.15), (6.16), (6.26) – (6.29), а оптимальне керування $(\bar{g}_n^{(2)})_{n=0}^{\infty}$ задає коефіцієнти температурного поля (6.8) на поверхні Γ_2 , дає мінімум функціоналу якості (6.33) і задовольняє обмеженню (6.34).

6.6 Метод розв'язання еквівалентної задачі

Маючи на увазі, що послідовності $\{b_{1,n}^{(1)}, b_{2,n}^{(1)}, \bar{g}_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ задовольняють лінійним співвідношенням (6.12), (6.15), (6.16), (6.26) – (6.29), можна стверджувати їх лінійну залежність від параметрів $\{\bar{g}_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}, \{f_n^{(j)}\}_{j=1,n=0}^{2,\infty}$

$$b_{i,n}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[c_{n,k}^{(i)} \bar{g}_k^{(2)} + \sum_{j=1}^2 s_{n,k}^{(i,j)} f_k^{(j)} \right], \quad \bar{g}_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{n,k} \bar{g}_k^{(2)}, \quad (6.35)$$

причому невідомі коефіцієнти $\{c_{n,k}^{(i)}\}_{n,k=0}^{\infty}, \{s_{n,k}^{(i,j)}\}_{n,k=0}^{\infty}, \{q_{n,k}\}_{n,k=0}^{\infty}$ попередніх розвинень можна знайти з таких співвідношень:

$$c_{n,k}^{(i)} = \frac{\partial b_{i,n}^{(1)}}{\partial \bar{g}_k^{(2)}}, \quad s_{n,k}^{(i,j)} = \frac{\partial b_{i,n}^{(1)}}{\partial f_k^{(j)}}, \quad q_{n,k} = \frac{\partial \bar{g}_n^{(1)}}{\partial \bar{g}_k^{(2)}}. \quad (6.36)$$

Підставимо формули (6.35) у функціонал (6.33)

$$J[\bar{g}^{(2)}] = 2G_1^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k}^{(j)} \bar{g}_k^{(2)} + F_n^{(j)} \right]^2, \quad (6.37)$$

де

$$B_{n,k}^{(j)} = \sum_{i=1}^2 \eta_n^{(j,i)} c_{n,k}^{(i)} + \tau_n^{(j)} q_{n,k}, \quad (6.38)$$

$$F_n^{(j)} = \sum_{i=1}^2 \eta_n^{(j,i)} \sum_{r=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}^{(i,r)} f_k^{(r)}. \quad (6.39)$$

Після зведення функціонала до фізично безвимірного вигляду маємо:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k}^{(j)} \bar{g}_k^{(2)} + F_n^{(j)} \right]^2 \rightarrow \min, \quad (6.40)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{g}_n^{(2)})^2 (n+1/2)^{-1} = (\alpha_0^{\nu_0})^2 T^2. \quad (6.41)$$

Задачу (6.40), (6.41) на умовний екстремум будемо розв'язувати методом Лагранжа, зводячи її до задачі на безумовний мінімум функціонала

$$L[\bar{g}^{(2)}] = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k}^{(j)} \bar{g}_k^{(2)} + F_n^{(j)} \right]^2 + \varsigma \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{g}_n^{(2)})^2 (n+1/2)^{-1}. \quad (6.42)$$

Тут ς – множник Лагранжа. Існування та єдиність розв'язку задачі (6.42), (6.41) буде доведено далі в теоремі 6.5. Необхідна умова мінімуму функціонала (6.42) приводить до такої системи:

$$(\varsigma \tilde{D} + B) \bar{g}^{(2)} = -F, \quad (6.43)$$

де

$$B = \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,m}^{(j)} B_{n,k}^{(j)} \right)_{n,k=0}^{\infty}, \quad (6.44)$$

$$\tilde{D} = \text{diag} \left(\frac{2}{2n+1} \right)_{n=0}^{\infty}, \quad F = \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,m}^{(j)} F_n^{(j)} \right)_{m=0}^{\infty}. \quad (6.45)$$

Множник Лагранжа ς знаходиться з додаткової умови (6.34).

Перш ніж дослідити оператор системи (6.43) наведемо практичний спосіб обчислення елементів матриць B і F . Виходячи з формул (6.12), (6.15), (6.16), (6.28) – (6.30), (6.36), маємо

$$(I - U_{22}) \frac{\partial \bar{t}^{(2)}}{\partial \bar{g}^{(2)}} = I, \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{(1)}}{\partial \bar{g}^{(2)}} = \frac{\alpha_1^{\nu_1}}{\alpha_0^{\nu_0}} U_g \frac{\partial \bar{t}^{(2)}}{\partial \bar{g}^{(2)}}, \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial \bar{t}^{(1)}}{\partial \bar{g}^{(2)}} = -U_{12} \frac{\partial \bar{t}^{(2)}}{\partial \bar{g}^{(2)}}, \quad (6.48)$$

$$\Phi \frac{\partial a}{\partial \bar{g}^{(2)}} = \frac{\partial f_t}{\partial \bar{g}^{(2)}}, \quad \Phi \frac{\partial a}{\partial f^{(j)}} = \frac{\partial f_t}{\partial f^{(j)}}, \quad (6.49)$$

$$j = 1, 2; \quad m = 0 \div \infty;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{i,n}^{(1)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}} &= \mathcal{G}_n^{(i,1)} \frac{\partial a_{1,n}^{(1)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}} + \mathcal{G}_n^{(i,2)} \frac{\partial a_{2,n}^{(1)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}} + \delta_{i,1} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,1)} \frac{\partial a_{1,k}^{(2)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{n,k}^{(i)} \frac{\partial a_{2,k}^{(2)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}} + \sigma_{t,n}^{(i)} \frac{\partial \bar{t}_n^{(1)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{i,n,k}^{(i)} \frac{\partial \bar{t}_k^{(2)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}} + \sigma_{g,n}^{(i)} \frac{\partial \bar{g}_n^{(1)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}}, \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial b_{i,n}^{(1)}}{\partial f_m^{(j)}} = \mathcal{G}_n^{(i,1)} \frac{\partial a_{1,n}^{(1)}}{\partial f_m^{(j)}} + \mathcal{G}_n^{(i,2)} \frac{\partial a_{2,n}^{(1)}}{\partial f_m^{(j)}} + \delta_{i,1} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}^{(1,1)} \frac{\partial a_{1,k}^{(2)}}{\partial f_m^{(j)}} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{n,k}^{(i)} \frac{\partial a_{2,k}^{(2)}}{\partial f_m^{(j)}}, \quad (6.51)$$

$$i = 1, 2; \quad n = 0 \div \infty,$$

де

$$U_{12} = \left(\gamma_n u_{n,k}^{(1)} \right)_{n,k=0}^{\infty}, \quad U_g = \left((1 - \gamma_n) u_{n,k}^{(1)} \right)_{n,k=0}^{\infty}$$

$$U_{22} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u_{n,k}^{(2)} u_{k,s}^{(1)} \right)_{k,s=0}^{\infty},$$

$I = (\delta_{n,m})_{n=0}^{\infty}$, $\delta_{i,k}$ – дельта-символ Кронекера, $\frac{\partial \bar{t}^{(2)}}{\partial \bar{g}^{(2)}}$, $\frac{\partial \bar{t}^{(2)}}{\partial \bar{g}^{(2)}}$, $\frac{\partial \bar{g}^{(1)}}{\partial \bar{g}^{(2)}}$ – матриці перших похідних, $\frac{\partial a}{\partial \bar{g}^{(2)}}$, $\frac{\partial a}{\partial f^{(j)}}$, $\frac{\partial f_t}{\partial \bar{g}^{(2)}}$, $\frac{\partial f_t}{\partial f^{(j)}}$ – блочні матриці перших похідних.

Зауваження. Для знаходження похідних $\frac{\partial \bar{t}^{(j)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}}$, $\frac{\partial a}{\partial \bar{g}_m^{(2)}}$, $\frac{\partial a}{\partial f_m^{(j)}}$ необхідно

розв'язувати ті ж самі системи (6.15), (6.16), (6.30), але ж з іншими правими частинами. Це означає, що розв'язність систем (6.46), (6.49) обґрунтовується в теоремах 6.1, 6.2.

Для подальшого введемо позначення

$$\left(\frac{\bar{t}_k^{(2)}}{\sqrt{k+1/2}} \right)_{k=0}^{\infty} = \left(\tilde{t}_k^{(2)} \right)_{k=0}^{\infty} = \tilde{t}^{(2)}, \quad \left(\frac{\bar{g}_m^{(2)}}{\sqrt{m+1/2}} \right)_{m=0}^{\infty} = \left(\tilde{g}_m^{(2)} \right)_{m=0}^{\infty} = \tilde{g}^{(2)},$$

$$\tilde{B} = \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_{n,m}^{(j)} \tilde{B}_{n,k}^{(j)} \right)_{m,k=0}^{\infty}, \quad \tilde{B}_{n,m}^{(j)} = B_{n,m}^{(j)} \sqrt{m+1/2}, \quad \tilde{F} = \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_{n,m}^{(j)} F_n^{(j)} \right)_{m=0}^{\infty}.$$

У нових позначеннях систему (6.43) можна записати у вигляді

$$(\varsigma I + \tilde{B}) \tilde{g}^{(2)} = -\tilde{F}. \quad (6.52)$$

з обмеженням

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{g}_n^{(2)})^2 = 2(\alpha_0^{\nu_0})^2 T^2. \quad (6.53)$$

Теорема 6.4. При виконанні умов теореми 2 матриця \tilde{B} системи (6.52) задає симетричний, додатний, компактний оператор у просторі l_2 .

Доведення. Симетричність матриці B є очевидною. Крім того, вона є додатною оскільки для будь-якого $x = (x_k) \in l_2$ квадратична форма

$$(\tilde{B}x, x) = \sum_{m,k=0}^{\infty} x_m x_k \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_{n,m}^{(j)} \tilde{B}_{n,k}^{(j)} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_{n,k}^{(j)} x_k \right)^2 \geq 0.$$

Доведемо, що матриця \tilde{B} задає компактний оператор у гільбертовому просторі l_2 . Спершу будемо доводити компактність оператора, який задається матрицею з елементами $\tilde{B}_{n,m}^{(j)}$. Оскільки строго оцінити матричні коефіцієнти цієї матриці неможливо, застосуємо такий штучний прийом. Для простоти покажемо його на прикладі однієї зі складових елементів цієї матриці, а саме

$$\left(\tau_n^{(j)} \frac{\partial \bar{g}_n^{(1)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}} \sqrt{m+1/2} \right)_{n,m=0}^{\infty}. \quad \text{З формул (6.46), (6.47) випливає, що}$$

$$\left(\tau_n^{(j)} \frac{\partial \bar{g}_n^{(1)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}} \sqrt{m+1/2} \right)_{n,m=0}^{\infty} = \tilde{U}_g^{(j)} (I - \tilde{U}_{22})^{-1}, \quad (6.54)$$

де

$$\tilde{U}_g^{(j)} = \left((1 - \gamma_n) \tau_n^{(j)} u_{n,k}^{(1)} \sqrt{k+1/2} \right)_{n,k=0}^{\infty},$$

$$\tilde{U}_{22} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\sqrt{n+1/2}} u_{n,k}^{(2)} u_{k,s}^{(1)} \sqrt{s+1/2} \right)_{n,s=0}^{\infty}.$$

Матриці $\tilde{U}_g^{(j)}, \tilde{U}_{22}$ задають компактні оператори, а $(I - \tilde{U}_{22})^{-1}$ – обмежений оператор в просторі l_2 . Останнє є наслідком збіжності будь-яких рядів виду

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} n^s k^r |u_{n,k}^{(j,i)}| < \infty,$$

де s, r – фіксовані невід’ємні цілі числа. Тоді, згідно з властивостями компактних операторів, матриця (6.54) також задає компактний оператор.

Так само теорема доводиться для інших складових компонентів матриць $\tilde{B}_{n,m}^{(j)}$. Остаточний результат випливає з того, що матриця \tilde{B} є сумою добутків матриць, які задають компактні оператори в l_2 .

Зауваження.

1. Користуючись тими ж ідеями, можна довести, що при $f^{(j)} \in l_2$ стовпець $\tilde{F} \in l_2$.

2. Крім властивостей матриці \tilde{B} , перелічених в теоремі 6.4, можна також довести, що вона є невиродженою матрицею, тобто $(Bx, x) = 0$ тільки, якщо $x = 0$.

Подальший розв’язок задачі базується на методі В. К. Іванова побудови квазірозв’язку некоректної задачі. З властивостей оператора \tilde{B} випливає, що його спектр складається із зліченої послідовності додатних власних значень

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots,$$

яка збігається до нуля. Нехай $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – повна ортонормована система власних векторів оператора \tilde{B} у просторі l_2 , які відповідають власним значенням $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Позначимо через $f_n = (\tilde{F}, \varphi_n)$ коефіцієнти Фур’є розвинення вектора \tilde{F} за системою $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 6.5. Нехай виконуються умови теореми 6.2. Якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} \leq 2(\alpha_0^{\nu_0})^2 T^2, \quad (6.55)$$

то існує розв'язок рівняння (6.52) при $\varsigma = 0$

$$\tilde{g}^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \varphi_n \in l_2, \quad (6.56)$$

а обмеження (6.53) не враховується. Якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} > 2(\alpha_0^{\nu_0})^2 T^2, \quad (6.57)$$

то при $\varsigma > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (6.52), (6.53) у просторі l_2 .

Доведення. Перше твердження теореми перевіряється безпосередньо. Доведемо друге твердження. У нових позначеннях, уведених вище в цьому пункті, задачу (6.42), (6.41) можна записати так:

$$L[\tilde{g}^{(2)}] = (S_{\varsigma} \tilde{g}^{(2)}, \tilde{g}^{(2)}) + 2(\tilde{F}, \tilde{g}^{(2)}) + \sum_{j=1}^2 \|F^{(j)}\|^2 \rightarrow \min, \quad (6.58)$$

$$\|\tilde{g}^{(2)}\|^2 = 2(\alpha_0^{\nu_0})^2 T^2, \quad (6.59)$$

де $S_{\varsigma} = \varsigma I + \tilde{B}$. Оператор S_{ς} є заданим на просторі l_2 симетричним додатно визначеним обмеженим оператором. Останнє твердження випливає з очевидної нерівності для будь-якого $\tilde{g}^{(2)} \in l_2$

$$\varsigma \|\tilde{g}^{(2)}\|^2 \leq (S_{\varsigma} \tilde{g}^{(2)}, \tilde{g}^{(2)}) \leq (\varsigma + \lambda_1) \|\tilde{g}^{(2)}\|^2.$$

Остання нерівність дозволяє в l_2 ввести ще одну норму

$$\|\tilde{g}^{(2)}\|_S = \sqrt{(S_{\varsigma} \tilde{g}^{(2)}, \tilde{g}^{(2)})},$$

яка еквівалентна основній та індукована скалярним добутком

$$(f, g)_S = (S_{\varsigma} f, g) \quad f, g \in l_2.$$

Тепер існування єдиного $\tilde{g}^{(2)} \in l_2$, який задає мінімум функціонала (6.58) при кожному фіксованому значенні параметра $\varsigma > 0$, випливає з того, що скалярний

добуток $(\tilde{F}, \tilde{g}^{(2)})$ є обмеженим функціоналом також і в нормі $\|\cdot\|_S$, а тому, за теоремою Рісса, дорівнює

$$(\tilde{F}, \tilde{g}^{(2)}) = (F_0, \tilde{g}^{(2)})_S$$

для деякого єдиного елемента $F_0 \in l_2$. Тоді

$$\begin{aligned} L[\tilde{g}^{(2)}] &= (\tilde{g}^{(2)}, \tilde{g}^{(2)})_S + 2(F_0, \tilde{g}^{(2)})_S + \sum_{j=1}^2 \|F^{(j)}\|^2 = \\ &= \|\tilde{g}^{(2)} + F_0\|_S^2 - \|F_0\|_S^2 + \sum_{j=1}^2 \|F^{(j)}\|^2. \end{aligned}$$

Звідси мінімум функціонала (6.58) досягається на елементі $\tilde{g}^{(2)} = -F_0$.

Необхідна умова (6.52) мінімуму функціонала (6.58) дає можливість явно побудувати оптимальне керування $\tilde{g}^{(2)}$, користуючись спектральним розкладом оператора S_ς

$$\tilde{g}^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\varsigma + \lambda_n} \varphi_n. \quad (6.60)$$

Залишилось задовольнити умову (5.59). Для цього параметр ς необхідно вибрати як додатний корінь рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{(\varsigma + \lambda_n)^2} = 2(\alpha_0^{v_0})^2 T^2. \quad (6.61)$$

Ліва частина рівняння (6.61) на півосі $\varsigma \in (0, \infty)$ є неперервною, монотонно спадною функцією з областю значень

$$\left(0, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} \right)$$

(права межа інтервалу може дорівнювати ∞ , якщо ряд розбігається). Тоді, виходячи з умови (6.57), існує єдине значення параметра $\varsigma > 0$, для якого виконується рівність (6.59). Таким чином, задача (6.58), (6.59) має єдиний розв'язок $\tilde{g}^{(2)} \in l_2$.

Зауваження. При виконанні умови (6.55) оптимальне керування (6.56) є розв'язком вихідної задачі (6.1) – (6.6) без обмеження (6.7).

6.7. Комп'ютерний експеримент

Чисельний розв'язок еквівалентної задачі розіб'ємо на два етапи. На першому етапі будемо формувати матрицю \tilde{B} і стовпець правих частин \tilde{F} системи (6.63). Для цього необхідно розв'язати системи (6.46), (6.49) і знайти похідні $\frac{\partial \bar{g}^{(1)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}}$, $\frac{\partial b_{i,n}^{(1)}}{\partial \bar{g}_m^{(2)}}$, $\frac{\partial b_{i,n}^{(1)}}{\partial f_m^{(j)}}$ за формулами (6.48), (6.50), (6.51). Як було доведено у пунктах 6.2, 6.4, означені системи мають фредгольмові оператори і однозначно розв'язні. Відомо, що такі системи можна коректно розв'язати методом редукції. На другому етапі розв'язується система (6.52), оператор якої також є фредгольмовим. Тут знову використовується метод редукції. До редукованої матриці системи (6.52) застосовано спектральний розклад, в результаті чого відносно параметра ς з умови (6.53) отримано раціональне рівняння (6.61).

Обчислення проводились для матеріалів областей: Ω_0 – сталь, Ω_1 – алюміній, для яких $G_1 / G_0 = 0.317$, $\alpha_1 / \alpha_0 = 1.71$, $k_1 / k_0 = 4.61$, $\nu_0 = 0.28$, $\nu_1 = 0.34$. Уважалось, що на поверхню Γ_2 діє гідростатичний тиск з напруженнями $\sigma_r / (2G_0) = -10^{-3}$, $\tau_{r\theta} / (2G_0) = 0$. Результати комп'ютерного експерименту наведено на рисунках 6.1 – 6.5 і в таблиці 6.1.

На рисунку 6.1 зображено графіки температури $T_2(\theta) \cdot 10^{-2}$ при заданій відносній відстані $d_{12} \equiv 1 - R_1 / z_{12} - R_2 / z_{12} = 0.3$ і різних відношеннях радіусів поверхонь $R_{12} \equiv R_1 : R_2 = 5:2, 9:5, 4:3$. З графіків випливає, що оптимальний розподіл температури при $R_{12} \in [1.33; 2.5]$ мало залежить від відношення радіусів поверхонь практично на всьому відрізку $\theta \in [0; \pi]$, крім областей в околі його кінців. Подібна поведінка кривих оптимального керування спостерігається при $R_{12} \in [0.56; 1.0]$ (рисунку 6.2) з тією різницею, що розподіл температури в околі полюсів сферичних поверхонь має протилежний знак. На рисунках 6.3 – 6.5 графіки показують залежність оптимального розподілу температури від відносної відстані d_{12} між поверхнями при фіксованому відношенні їх радіусів: $R_{12} = 2$ (рисунку 6.3),

$R_{12} = 0.5$ (рис. 6.4), $R_{12} = 1$ (рисунку 6.5). Як можна було б передбачити, при наближенні поверхонь одна до одної найбільші температурні ефекти виникають в областях, розташованих в околі осі задачі. При цьому на проміжку $\theta \in [\pi/4; 3\pi/4]$ характер розподілу оптимальної температури на поверхні Γ_2 є практично однаковим при різних геометричних параметрах задачі.

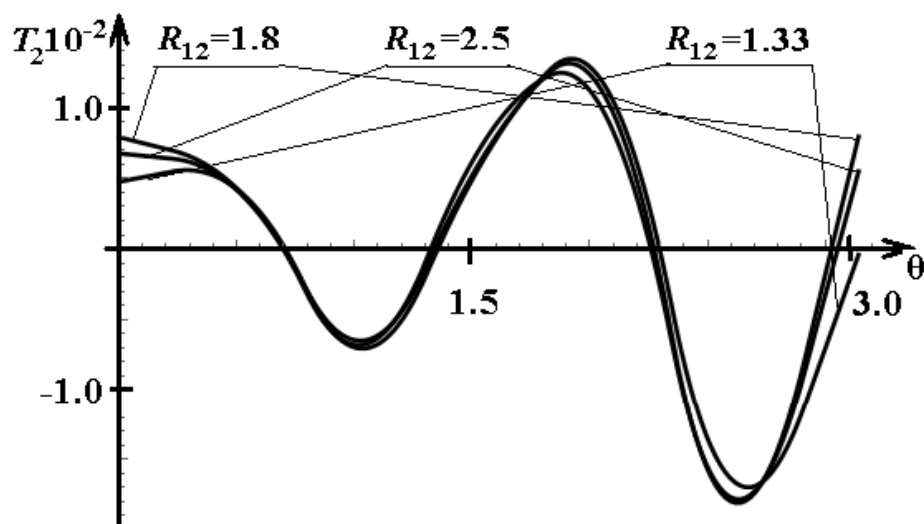


Рисунок 6.1. Графіки розподілу температури $T_2(\theta) \cdot 10^{-2}$ на поверхні Γ_2 при відносній відстані $d_{12} = 0.3$ між поверхнями і відношенню їх радіусів R_{12}

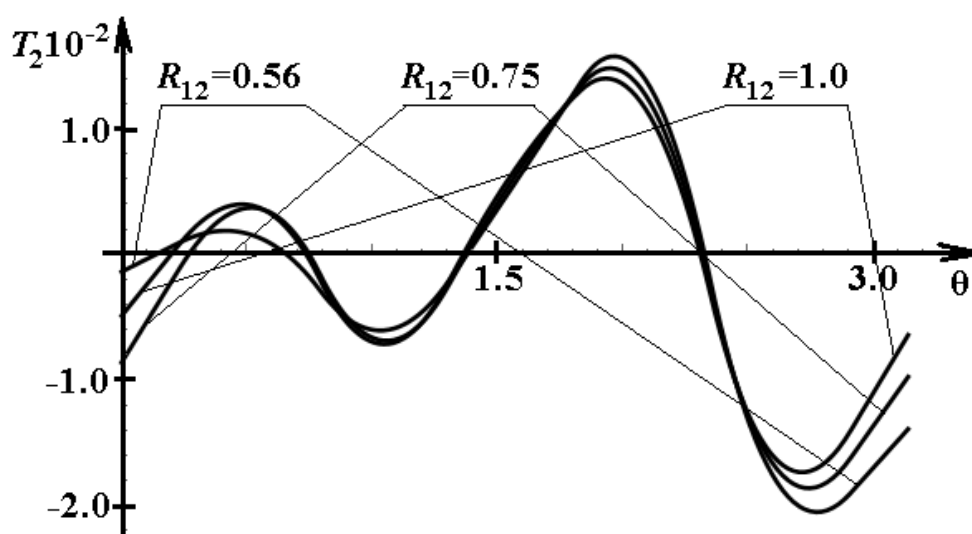


Рисунок 6.2. Графіки розподілу температури $T_2(\theta) \cdot 10^{-2}$ на поверхні Γ_2 при відносній відстані $d_{12} = 0.3$ між поверхнями і відношенню їх радіусів R_{12}

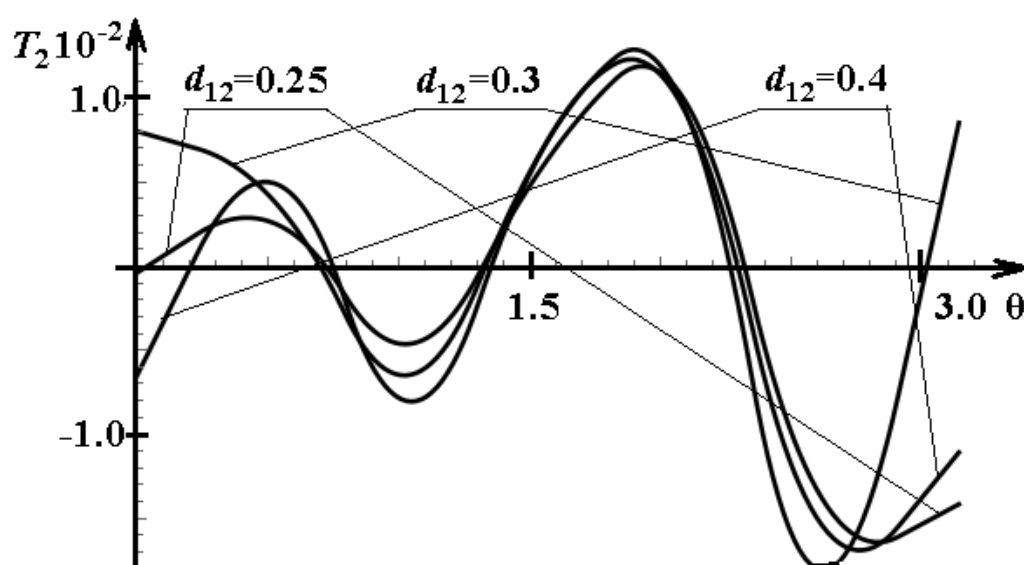


Рисунок 6.3. Графіки розподілу температури $T_2(\theta) \cdot 10^{-2}$ на поверхні Γ_2 при відносній відстані d_{12} між поверхнями і відношенню їх радіусів $R_{12} = 2$

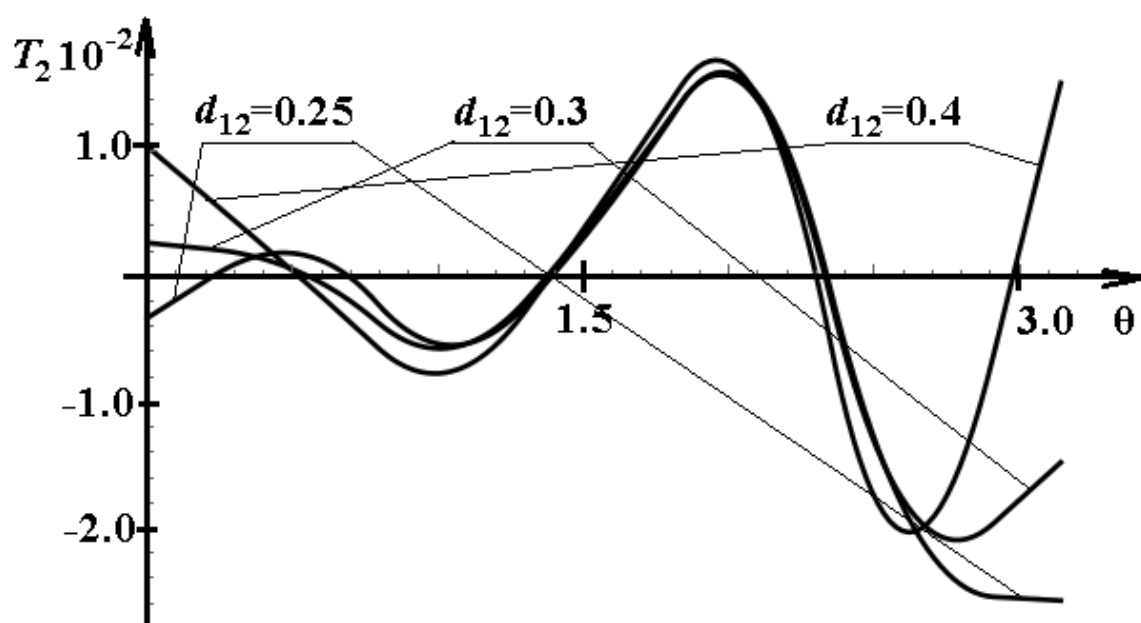


Рисунок 6.4. Графіки розподілу температури $T_2(\theta) \cdot 10^{-2}$ на поверхні Γ_2 при відносній відстані d_{12} між поверхнями і відношенню їх радіусів $R_{12} = 0.5$

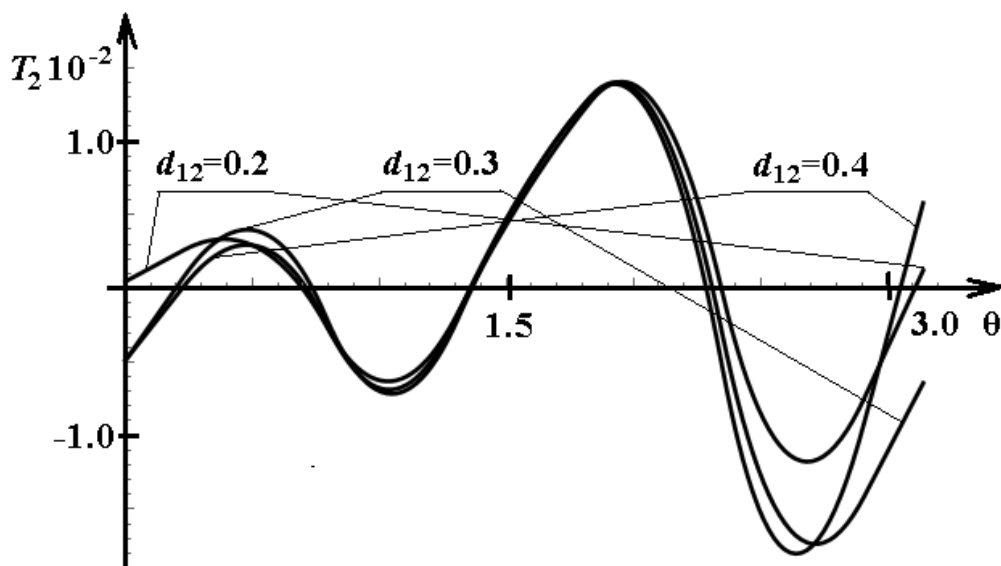


Рисунок 6.5. Графіки розподілу температури $T_2(\theta) \cdot 10^{-2}$ на поверхні Γ_2 при відносній відстані d_{12} між поверхнями і відношенню їх радіусів $R_{12} = 1$

Оскільки при розв'язанні еквівалентної задачі багато разів використовувався метод редукції, крім його теоретичної збіжності, доведеної в теоремах 6.1, 6.2, 6.4, необхідно з'ясувати його практичну збіжність. Таке дослідження було проведено в роботі. Його результати наведено в таблиці 6.1. У цій таблиці величина ε задає у відсотках відносну похибку обчислення значень оптимального керування в точках

$\theta_k = \frac{\pi k}{6}$, $k = 0 \div 6$ відрізка $[0; \pi]$. Похибка обчислюється за формулою

$$\varepsilon = |T_{2,40}(\theta) - T_{2,30}(\theta)| / |T_{2,40}(\theta)| \cdot 100,$$

де $T_{2,n}(\theta)$ – наближений розв'язок еквівалентної задачі, який відповідає параметру редукції n . Параметр редукції n задає $n+1$ невідому кожного типу, яка утримується в системах (6.43), (6.46), (6.49) при їх редукції до скінченних систем.

Таблиця 6.1 Відносна похибка $\varepsilon \cdot 10^3$ (%) обчислення температури $T_2(\theta)$ для різних параметрів редукції

$\theta \setminus R_{12}$	5/2	9/5	4/3	1	3/4	5/9	2/5
0	97	7,2	4.4	0.5	0.8	33	36
$\pi / 6$	16	2.3	0.8	0.1	0.4	6.3	53
$\pi / 3$	0.1	0.2	0.07	0.02	0.2	1.2	7.3
$\pi / 2$	1.8	0.2	0.08	0.01	0.1	0.8	4.5
$2\pi / 3$	2.4	0.3	0.01	0.01	0.1	0.2	0.6
$5\pi / 6$	1.4	0.2	0.08	0.03	0.2	1.2	6.2
π	21	2.5	16	0.5	2.3	12	64

Відомо, що при зближенні поверхонь швидкість збіжності методу редукції зменшується. В таблиці похибку $\varepsilon \cdot 10^3$ у відсотках обчислено для відносної відстані $d_{12} = 0.3$. Природно, що її величина є різною в різних точках відрізка $[0, \pi]$, причому найгірші результати спостерігаються на його кінцях. Але комп'ютерний експеримент показав, що навіть при наближенні поверхонь до відстані $d_{12} = 0.2 \div 0.25$ у найбільш проблемних точках залишається точність, яка визначається двома вірними значущими цифрами після точки в десятирічному записі результату.

6.8 Висновки розділу 6.

У розділі запропоновано новий високоефективний метод визначення оптимального керування напружено-деформованим станом просторового багатозв'язного складеного тіла за допомогою стаціонарного температурного поля. Метод розглянуто на прикладі стаціонарної вісесиметричної термопружної задачі для простору зі сферичними включенням і порожниною. Він базується на узагальненому методі Фур'є і дає можливість звести вихідну задачу до еквівалентної задачі оптимального керування, в якій стан об'єкту визначається

нескінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь, права частина яких параметрично залежить від керування. При цьому функціонал вартості вихідної задачі перетворюється на квадратичний функціонал, який залежить від стану еквівалентної системи і параметрично від керування, а обмеження на розподіл температури замінюється значенням норми керування в просторі l_2 . Метод також вирішує основну проблему еквівалентної задачі – неможливість отримання явної залежності стану системи від керування. В роботі запропоновано подання розв'язків нескінченних систем у параметричній формі через компоненти похідних стану об'єкту, завдяки чому еквівалентну задачу було зведено до задачі на умовний екстремум квадратичного функціонала, який вже явно залежить від керування. Зазначене вище подання засновано на розв'язках низки нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які відрізняються тільки правими частинами. Подальший розв'язок задачі на умовний екстремум функціонала вартості знаходиться методом Лагранжа і зводить цю задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з параметром і обмеженням у вигляді додаткового квадратичного рівняння. Остання задача досліджується спектральним методом.

Розроблений у роботі метод строго обґрунтований. Для всіх нескінченних систем доведено фредгольмовість їх операторів, для системи з параметром встановлено властивості оператора системи, які дозволяють користуватися його спектральним розкладом. Як важливий результат, без якого неможливо було б обґрунтування запропонованого методу, вперше отримано оцінку знизу модуля багатопараметричного визначника розв'язувальної системи крайової задачі спряження – простір зі сферичним включенням – при розв'язанні її методом Фур'є. Основним результатом роботи стала теорема яка встановлює умови існування та єдиності в просторі l_2 розв'язку еквівалентної задачі або задачі оптимального керування без обмеження.

Чисельний алгоритм засновано на методі редукції розв'язання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Відомо, що він є коректним для систем з фредгольмовими операторами, тобто наближений розв'язок збігається до точного

при зростанні параметра редукції. Проведено дослідження практичної точності чисельного алгоритму шляхом порівняння оптимального керування, отриманого при різних параметрах редукції. Розрахунки показали стійкість методу і достатньо високу точність навіть при наближенні граничних поверхонь на відносну відстань 0.2. В роботі наведено графіки оптимального розподілу температури при різних геометричних параметрах задачі та їх аналіз.

Метод припускає розповсюдження на інші крайові задачі з різною геометрією.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено клас вісесиметричних задач стаціонарної термопружності для простору зі сферичними неоднорідностями при наявності температурного поля, обумовленого як зовнішніми тепловими умовами, так і внутрішніми розподіленими джерелами тепла. Актуальність теми дисертації не викликає сумнівів, оскільки вона пов'язана з проблемами моделювання термопружних полів при створенні новітніх матеріалів, з розрахунками міцності при конструюванні різних технічних систем, з керуванням напруженим станом технічних об'єктів, які знаходяться під впливом температурних полів.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи включає наступне:

1. Набув подальшого розвитку апарат узагальненого методу Фур'є, що полягає у наступному: побудовані нові вісесиметричні векторні базисні розв'язки рівнянь Ламе і Дюамеля – Неймана в сферичних координатах, на основі наборів гармонічних, бігармонічних і полігармонічних функцій третього порядку. Для цих розв'язків вперше отримано теореми додавання в системах координат, початки яких довільно зсунуті один відносно одного вздовж осі симетрії.

2. Уперше отримано обґрунтований аналітичний розв'язок другої вісесиметричної крайової задачі теорії пружності для кулі з концентричним сферичним включенням в загальній постановці звичайним методом Фур'є. Встановлено клас розв'язності задачі. Для цього вперше отримано оцінку знизу модуля багатопараметричного визначника розв'язувальної системи в задачі спряження деформаційних полів.

3. Уперше отримано локальну аналітико-числову модель термонапруженого стану у пористому матеріалі в області між двома сферичними порами.

4. Уперше поставлено і розв'язано задачу оптимального керування розподіленою системою в багатозв'язній області, а саме, керування температурним полем напруженого стану кусково-однорідного простору зі сферичними включенням і порожниною. Для цього вперше розв'язано задачу оптимального керування системою, стан якої визначається нескінченною системою лінійних

алгебраїчних рівнянь.

5. Розроблено новий метод параметричного розв'язання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, праві частини яких лінійно залежать від параметрів.

6. Уперше розв'язано задачу про розподіл температурних напружень у кусково-однорідному просторі зі сферичними включеннями при наявності в них розподілених джерел тепла у випадку, коли включення і простір мають різні термомеханічні характеристики.

Отримані в дисертації результати мають не тільки теоретичне, але й важливе практичне значення. Аналітичні розв'язки розглянутих у дисертації задач для простору з двома сферичними порожнинами і з двома включеннями фактично задають локальні параметричні моделі термопружного стану в пористих і зернистих композитних матеріалах (зі сферичними порами і зернами). Важливість і практичне значення отриманих параметричних моделей, на відміну від чисто чисельного комп'ютерного моделювання методом скінченних елементів (МСЕ), продемонстровано в роботі на прикладі розв'язання задачі оптимального керування температурним полем термопружного стану простору зі сферичними порожниною і включенням, де оптимізація фактично проводиться за певними параметрами локальних моделей. Отримані математичні моделі без суттєвих ускладнень розповсюджуються на тіла з різною (іноді великою) кількістю неоднорідностей і періодичні задачі, де МСЕ мало ефективен. При математичному і комп'ютерному моделюванні полів напружень і деформацій наведені в дисертації моделі забезпечують максимальну точність при задоволенні граничних умов по відношенню до інших методів моделювання. Важливими практичними результатами роботи також є чисельне моделювання розглянутих термопружних полів, отриманий на основі нього аналіз розподілу напружень в околі порожнин і включень в залежності від геометричних і термомеханічних параметрів, встановлення закономірностей взаємного впливу концентраторів напружень на їх локальний розподіл. Ці результати можуть бути використано при конструюванні різних термомеханічних систем. Крім строгого теоретичного обґрунтування розроблених у дисертації методів в усіх задачах досліджувалися питання чисельної

збіжності наближених розв'язків і встановлення меж їх практичної реалізації методів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
2. Timoshenko S., Goodier J. N. Theory of Elasticity. – 2nd ed. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1951. – 506 p.
3. Тимошенко С. П. Курс теорії пружності. – Київ: Наукова думка, 1972. – 508 с.
4. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Плоска задача теорії пружності. – Київ: НМК ВО, 1991. – 104 с.
5. Гоголева О. С. Приклади вирішення першої основної крайової задачі теорії пружності в напівсмугі (симетричне задача) // Вісник Одеського державного університету. – 2012. – № 9 (145). – С. 138–142.
6. Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G. A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2020. – Vol. 71.
7. Ревенко В. П. Спектральна задача осесиметричної теорії пружності // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2003. – Вип. 61. – С. 249–258.
8. Ревенко В. П. Побудова розв'язку плоскої задачі теорії пружності для прямокутної пластини методом інтегральних моментів // Доповіді НАН України. – 2004. – № 8. – С. 59–65.
9. Ревенко В. П. Розвиток спектрального методу Штурма–Ліувілля розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння // Нелінійні коливання. – 2003. – Т. 6, № 3. – С. 368–377.
10. Ревенко В. П. Застосування нового аналітично-числового методу Остроградського до розв'язування плоскої задачі теорії пружності // Доповіді НАН України. – 2007. – № 4. – С. 59–65.
11. Ревенко В. П. Про конструктивний аналітично-числовий метод розв'язування плоскої задачі для пластини з кутовими точками // Доповіді НАН України. –

2009. – № 2. – С. 59–66. Режим доступу:
http://nbuv.gov.ua/UJRN/dnanu_2009_2_13
12. Вігак В. М., Токовий Ю. В. Дослідження плоского напруженого стану в прямокутній області // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2002. – Т. 37, № 2. – С. 61–66.
 13. Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinskyj A. V. The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain // Journal of Thermal Stresses. – 1998. – Vol. 21, № 5. – P. 545–561.
 14. Юзв'як М. Й., Токовий Ю. В. Розв'язок плоскої задачі теорії пружності для кільцевого сектора // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2021. – № 19. – С. 63–71. DOI: 10.15407/apmm2021.19.63-71
 15. Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Подання розв'язків плоских задач теорії пружності для прямокутної області через функції Вігака // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фізико-математичних наук. – 2021. – № 3. – С. 123–126. DOI: 10.17721/1812-5409.2021/3.24
 16. Опанасович В. К., Драган М. С., Тисовський Л. О. Напруження у площині, що містить систему прямолінійних включень // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1985. – Т. 21, № 6. – С. 21–26.
 17. Положий Г. Н. Теорія та застосування p -аналітичних та (p, q) -аналітичних функцій. Узагальнення теорії аналітичних функцій комплексного змінного : монографія. – Київ : Наук. думка, 1973. – 424 с.
 18. Карпіловський В. С. Метод скінченних елементів і задачі теорії пружності. – Київ : Софія А, 2022. – 275 с.
 19. Сахаров А. С., Альтенбах І., Кислоокій В. М., Киричевський В. В. та ін. Метод скінченних елементів у механіці твердих тіл. – Київ : Вища школа, 1982. – 480 с
 20. Nemayati M., Karami G. A. Boundary elements and particular integrals implementation for thermoelastic stress analysis // IJE/Transactions A: Basics. – 2002. – Vol. 15, no. 2. – P. 197–204.

21. Опанасович В. К., Драган М. С. Антиплоска деформація тіла з системою тонких пружних включень // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1984. – Вип. 22. – С. 71–77.
22. Al-Ali A. Y., Almutairi K. H., Rawy E. K., Ghaleb A. F., Abou-Dina M. S. Deformation of a long thermoelastic rod of rectangular normal cross-section under mixed boundary conditions by boundary integrals // Journal of the Egyptian Mathematical Society. – 2016. – Vol. 24. – P. 449–457. <https://doi.org/10.1016/j.joems.2015.09.003>
23. Zhong H., Yu T. A weak form quadrature element method for plane elasticity problems // Applied Mathematical Modelling. – 2009. – Vol. 33, no. 10. – P. 3801–3814. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.12.007>
24. Gomilko A. M. A Dirichlet problem for the biharmonic equation in a semiinfinite strip // Journal of Engineering Mathematics. – 2003. – Vol. 46, no. 3–4. – P. 253–368.
25. Попов Г. Я. Точні розв'язки деяких крайових задач механіки твердого тіла, що деформується / уклад. Н. Д. Вайсфельд ; МОН України ; Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова. – Одеса : Астропринт, 2013. – 424 с.
26. Kagadiy T. S., Shporta A. H. The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory // Natsional'nyi Hirnychyi Universytet. Naukovyi Visnyk. – 2015. – Iss. 3. – P. 76–81.
27. Кагадій Т. С., Шпорта А. Г., Білова О. В., Щербина І. В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом // Прикладні питання математичного моделювання. – 2020. – Т. 3, № 2.1. – С. 107–116. DOI: <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.10>.
28. Murakami Y. Metal fatigue: effects of small defects and nonmetallic inclusions. – Amsterdam : Elsevier, 2002. – 369 p.
29. Рудаков К. М. Ефективні алгоритми вирішення тривимірних крайових задач механіки твердого тіла, що деформується, методом скінченних елементів : дис. д-ра техн. наук : 05.02.07 / Рудаков К. М. ; Нац. техн. ун-т України "Київський політехнічний ін-т". – Київ, 1996. – 302 с.

30. Tsuchida E., Nakahara I., Kodama M. On the asymmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions // Bull. JSME. – 1980. – Vol. 23, № 181. – P. 1072–1080.
31. Alyokhina S., Kostikov A., Smetankina N., Gontarovskiy P., Garmash N., Melezhyk I. Methodology for determining the thermal and thermal-stress states of a concrete storage container for spent nuclear fuel for assessment of its service life // Nuclear and Radiation Safety. – 2021. – Vol. 4, no. 6. – P. 33–39.
32. Smetankina N., Morhun S. The modern single shaft gas turbine rotor stress-strain state determination taking into account the contact thermoelasticity problem // Tehnicki vjesnik – Technical gazette. – 2024. – Vol. 31, no. 2. – P. 551–556.
33. Nemish, Yu. N., Sagalyuk, I. S., & Chernopiskii, D. I. Axisymmetric stress and deformation in a layered, nearly spherical shell // Soviet Applied Mechanics. – 1989. – Vol. 25, No. 11. – P. 1075–1080. <https://doi.org/10.1007/BF00888989>
34. Капшивий О. О., Ногін Н. В. До вирішення основних задач вісесиметричної теорії пружності для простору зі сферичним розрізом // Математична фізика. – Київ : Наукова думка, 1971. – Вип. 9. – С. 38–47.
35. Капшивий О. О., Копистра Н. П., Ломонос Л. М. Вісесиметричний напружений стан кулі з неконцентричною кульовою порожниною // Доповіді АН УРСР. 1980. – А. – № 9. – С. 50–55.
36. Капшивий О. О., Ломонос Л. М., Стоян Н. Н. Друга основна задача про вісесиметричний напружений стан простору з двома сферичними порожнинами // Доповіді АН УРСР. – 1984. – Сер. А. – № 6. – С. 42–46.
37. Капшивий О. О., Ломонос Л. М., Стоян Н. Н. Перша основна задача про вісесиметричний напружений стан кулі з неконцентричною кульовою порожниною // Доповіді АН УРСР. – 1986. – Сер. А. – № 3. – С. 37–41.
38. Ломонос Л. М. Перша основна задача про вісесиметричний напружений стан простору з двома сферичними порожнинами // Мат. фізика та нелінійна механіка. – 1990. – № 13. – С. 51–56.
39. Бородачев Н. М. Розв'язок просторової задачі теорії пружності в напруженнях // Прикладна механіка. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 3–34.

40. Kaczyński A. On 3D symmetrical thermoelastic anticrack problems // Arch. Mech. – 2016. – Vol. 68, no. 2. – P. 99–112.
41. Рвачов В. Л., Проценко В. С. Контактні задачі теорії пружності для некласичних областей. – Київ : Наук. думка, 1977 – 236 с.
42. Kouris D., Tsuchida E., Mura T. The hemispheroidal inhomogeneity at the free surface of an elastic half space // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1989. – Vol. 56, no. 1. – P. 70–76.
43. Ніколаєв О. Г. Узагальнений метод Фур'є в просторових задачах теорії пружності для канонічних многозв'язних тіл: автореферат дисертації. д-ра фіз.-мат. наук. – Дніпропетровськ, 1997. – 36 с.
44. Ніколаєв О. Г. Формули перерозвинення векторних розв'язків рівняння Ламе в сферичній і сфероїдальній системах координат // Математичні методи аналізу динамічних систем. – Харків : ХАІ, 1984. – Вип. 8. – С. 100–104.
45. Ніколаєв О. Г. Формули, які зв'язують гармонічні функції для однопорожнинного гіперболоїда, циліндра, сфери, витягнутого і стиснутого сфероїдів // Методи математичної фізики та їх застосування. – Харків : ХАІ, 1988. – С. 9–13.
46. Ніколаєв О. Г. Про точні розв'язки рівняння Ламе для однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів і параболоїда обертання // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1992. – № 7. – С. 58–61.
47. Ніколаєв О. Г. Теореми додавання розв'язків рівняння Ламе. – Рукопис. Деп. в ДНТБ України 21.06.93, №1178–Ук 93. – 109 с.
48. Nikolaev A. G. Circular stamp on a transversely isotropic halfspace with a spheroidal cavity with the presence of adhesion // International Applied Mechanics. – 1994. – Vol. 30, issue 8. – P. 48–53. <https://doi.org/10.1007/BF00847232>
49. Ніколаєв О. Г. Теореми додавання переміщень трансверсально-ізотропних канонічних тіл. – Рукопис. Деп. в ДНТБ України 10.07.96, №1568–Ук 96. – 52 с.
50. Ніколаєв О. Г. Теореми додавання розв'язків рівняння Ламе в криволінійних системах координат, повернутих один відносно одного. – Рукопис. Деп. в ДНТБ України 10.07.96, №1570–Ук 96. – 37 с.

- 51.Ніколаєв О. Г. Класи розв'язності методом Фур'є основних крайових задач теорії пружності в деяких просторових канонічних областях. – Рукопис. Деп. в ДНТБ України 23.10.96, №1977–Ук 96. – 16 с.
- 52.Ніколаєв О. Г. Обґрунтування методу Фур'є в основних крайових задачах теорії пружності для деяких просторових канонічних областей // Доповіді НАН України. – 1998. – № 2. – С. 78–83.
- 53.Ніколаєв О. Г., Танчик Є. А. Напруження у нескінченному круговому циліндрі з чотирма циліндричними порожнинами // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2014. – Т. 57, № 3. – С. 132–142.
- 54.Ніколаєв О. Г., Танчик Є. А. Розвиток локальної моделі напруженого стану пористого матеріалу // Авіаційно-космічна техніка та технологія. – 2013. – № 1(98). – С. 14–18.
- 55.Ніколаєв О. Г., Танчик Є. А. Локальна математична модель зернистого композиційного матеріалу // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математика, прикладна математика та механіка. – 2010. – Т. 922. – С. 4–19.
- 56.Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications. – Springer Science Business Media, 2009. – 560 p.
- 57.Коваленко А. Д. Термопружність. – Київ : Вища школа, 1975. – 215 с.
- 58.Kassab A., Divo E. Application of the boundary element method to non-homogeneous media: heat conduction and thermoelasticity // WIT Transactions on State of the Art in Science and Engineering. – 2010. – Vol. 43. – P. 87–101. ISSN 1755-8336.
- 59.Shiah Y. C., Tan C. L. Thermoelastic analysis of 3D generally anisotropic bodies by the boundary element method // European Journal of Computational Mechanics. – 2016. – Vol. 25, No. 1–2. – P. 91–108.
- 60.Bozhydarnyk V. V., Pasternak Ia. M., Sulym H. T. 2D thermoelastic boundary element method for solids containing cracks and thin inclusions // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures. – 2011. – No. 17. – P. 51–59.

61. Tokovyy Y., Ma C. C. Analytical solutions to the 2D elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous planes and half-planes // *Archive of Applied Mechanics*. – 2009. – Vol. 79. – P. 441–456. <https://doi.org/10.1007/s00419-008-0242-5>
62. Entezari A., Kouchakzadeh M. Analytical solution of generalized coupled thermoelasticity problem in a rotating disk subjected to thermal and mechanical shock loads // *Journal of Thermal Stresses*. – 2012. – Vol. 35. – P. 363–376. <https://doi.org/10.1080/01495739.2016.122132972>
63. Сулім Г. Т., Томашевський М. М., Пастернак Я. М. Інтегральні рівняння плоскої термопружності для напівплощини з тонкими включеннями // *Теоретична і прикладна механіка*. – 2013. – Вип. 7 (53). – С. 101–108.
64. Zander, N., Kollmannsberger, S., Ruess, M., Yosibach, Z., Rank, E. The Finite Cell Method for linear thermoelasticity // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2012. – Vol. 64. – P. 3527–3541. DOI: 10.1016/j.camwa.2012.09.002.
65. Tang, J., Chen, G., Ge, Y. A novel edge center-based gradient-smoothing element method for 2D and 3D coupled thermoelasticity analyses // *Computers & Structures*. – 2023. – Vol. 275. – Article ID: 106920. – ISSN 0045-7949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2022.106920.
66. Youssef, H.M., Al-Lehaibi, E.A.N. The boundary value problem of a three-dimensional generalized thermoelastic half-space subjected to moving rectangular heat source // *Boundary Value Problems*. – 2019. – Vol. 2019, Article number: 8. DOI: 10.1186/s13661-019-1119-y.
67. Khomasuridze, N., Zirakashvili, N., Janjgava, R., Narmania, M. Analytical Solution of Classical and Non-Classical Boundary Value Contact Problems of Thermoelasticity for a Rectangular Parallelepiped Consisting of Contractible and Non-Contractible Elastic Layers and a Corresponding Program // *Proceedings of the International Conference "Modern Problems in Applied Mathematics" Dedicated to the 95th Anniversary of the I. Javakhishvili Tbilisi State University & 45th Anniversary of the I. Vekua Institute of Applied Mathematics of TSU* – 2023. – P. 29.

68. Bitsadze, L. Boundary Value Problems of Thermoelasticity for Porous Sphere and for a Space with Spherical Cavity // Brilliant Engineering. – 2022. – Vol. 3, No. 1. – P. 1–10.
69. Bitsadze, L. Boundary value problems of the theory of thermoelasticity for the sphere with voids // Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics REPORTS. – 2019. – Vol. 45.
70. Kurennov, S.S., Nikolaev, A.G. First Fundamental Axisymmetric Problem of Thermoelasticity for a Compressed Spheroid with a Concentric Spherical Cavity // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2004. – Vol. 45. – P. 76–81.
71. Nikolaev, A.G., Kurennov, S.S. The Nonaxisymmetric Contact Thermoelastic Problem for a Half-Space with a Motionless Rigid Spherical Inclusion // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2004. – Vol. 77. – P. 209–215. DOI: 10.1023/B:JOEP.0000020741.03468.6e.
72. Ніколаєв, О. Г., Курєнов, С. С. Термонапруження у просторі з періодично розташованими пружними кульовими включеннями // Проблеми машинобудування. – 2004. – № 1. – С. 35–48.
73. Ніколаєв, О. Г., Танчик, Е. А. Пружна механіка багатокомпонентних тіл: монографія. – Харків: ХАІ, 2014. – 272 с.
74. Ніколаєв, О. Г., Проценко, В. С. Узагальнений метод Фур'є у просторових задачах теорії пружності: монографія. – Харків: ХАІ, 2011. – 344 с.
75. Ніколаєв, О. Г., Скіцка, М. В. Локальна модель термопружного стану пористого матеріалу // Вісник НТУ "ХПІ". Сер. : Математичне моделювання в техніці та технологіях – 2023. – № 1. – С. 161–168.
76. Nikolaev, O., Skitska, M. Thermoelastic problem for a space with two inclusions and heat generation // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій – 2024. – Вип. 38. – С. 248–268. DOI: 10.15421/4224119.
77. Ieşan, D., Quintanilla, R. On a Theory of Thermoelastic Materials with a Double Porosity Structure // Journal of Thermal Stresses. – 2014. – Vol. 37. – P. 1017-1036 DOI: 10.1080/01495739.2014.914776.

78. Сулим, Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями – Львів: НТШ, 2007. – 716 с.
79. Бобильов (мол.), О., Лобода, В. Вісесиметрична контактна задача термопружності // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – Т. 56, № 4 – С. 149-157.
80. Дробенко, Б. Д. Про розрахунок оболочних конструкцій методом кінцевих елементів // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 1986. – Т. 23. – С. 84–88.
81. Кушнір, Р. М., Дробенко, Б. Д. Про дослідження міцності тонкостінних конструкцій // Матеріали 16-ї відкритої наук. конф. ІМФН. – Львів: Вид-во Львів. політехніки, 2020. – С. 89.
82. Дробенко, Б. Д. Скінченно-елементне моделювання // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 88–93. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Fmmit_2010_12_10.
83. Молчанов, І. М., Ніколенко, Л. Д. Основи методу скінченних елементів. – К.: Наукова думка, 1989 — 272 с.
84. Савула, Я. Г., Шинкаренко, Г. А., Вовк, В. Н. Деякі програми методу скінченних елементів. – Львів: Вища школа, 1981— 80 с.
85. Кушнір, Р. М., Токовий, Ю. В., Ясінський, А. В. Вісесиметричні термонапруження у пружному порожнистому циліндрі з довільно змінними вздовж радіуса тепловими властивостями // «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій», 10-12 жовтня – Дніпро, 2019. – С. 38.
86. Tokovy, Yu. Direct integration method // Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht: Springer, 2014. – Vol. 1. – P. 951–960.
87. Meleshko, V. V., Tokovy, Y., Barber, G. R. Axisymmetric thermal stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // Mathematical methods and physics of mechanical fields. – 2010. – Vol. 53, No. 1. – P. 120–137.
88. Tokovy, Y., Boiko, D. Solution of a Three-Dimensional Thermoelasticity Problem for an Infinite Transversely Isotropic Body // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – Vol. 256. – P. 467–481. DOI: 10.1007/s10958-021-05439-7.

89. Ghosn, A.H., Sabbaghian, M. Quasi-static coupled problems of thermoelasticity for cylindrical regions // *Journal of Thermal Stresses*. – 1982. – Vol. 5. – P. 299–313.
90. Калиняк, Б. М. Температурні поля, які не викликають напружень в неоднорідному осесиметричному порожнистому циліндрі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2021. – Т. 64, № 1. – С. 149–160
91. Процюк, Б. В. Статичні задачі термопружності для шаруватого функціонально-градієнтного термочутливого циліндра // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2021. – Т. 64, № 2. – С. 70–81. DOI: 10.15407/mmpmf2021.64.2.70-81.
92. Protsyuk, B.V. Axisymmetric static thermoelastic state of a smoothly fixed finite cylinder layered along the axis // *J. Math. Sci.* – 2012. – Vol. 187. – P. 737–757. DOI: 10.1007/s10958-012-1098-3.
93. Токовий, Ю. В. Інтегрування рівнянь плоских осесиметричних задач теорії пружності та термопружності для суцільних шаруватих циліндрів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2022. – Т. 65, № 1–2. – С. 136–145.
94. Halazyuk V. A., Kit H. S. Axisymmetric stress-deformed state of a body with a flat veil of heat sources // *Mathematical methods and physics of mechanical fields*. – 2011. – Vol. 54, No 1. – P. 141–152.
95. Кіт Г. С., Івасько Н. М. Двовимірна задача термопружності для півпростору з вільною, жорсткою, гладко або гнучко закріпленою межею за дії джерел тепла // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2020. – Т. 63, № 4. – С. 73–80.
96. Kit H. S., Chernyak M. S. Stress state of a body with heat-generating spherical inclusions // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2012. – Vol. 187, No 5. – P. 635–646. <https://doi.org/10.1007/s10958-012-1089-4>
97. Kit H., Andriychuk R. Thermal stressed state of a half space with heat generation in a spherical domain // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2023. – Vol. 273, No 1. – P. 1–8. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06488-w>
98. Кіт Г., Івасько Н., Андрійчук Р. Дво- і тривимірні задачі термопружності для півпросторів за тепловиділення і теплоізоляції у плоских областях // *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: тези доп. II*

- міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті акад. НАН України В. І. Моссаковського (до 100-річчя від дня народження), 2019. – Дніпро, 2019. – С. 34–36.
99. Процюк Б. В. Визначення статичного термопружного стану шаруватих термочутливих плити, циліндра і кулі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – Т. 64, № 1. – С. 87–106. <https://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.1.87-106>
 100. Процюк Б. В. Про розв'язання задач теплопровідності та термопружності для багат шарових тіл // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 1. – С. 30–32.
 101. Chiang C. R. Thermal mismatch stress of a spherical inclusion in a cubic crystal // International Journal of Fracture. – 2006. – Vol. 139, No 2. – P. 313–317.
 102. Rahman M., Michelitsch T. A general procedure for solving boundary-value problems of elastostatics for a spherical geometry based on Love's approach // Q. Jl Mech. Appl. Math. – 2007. – Vol. 60, No 2. – P. 139–160.
 103. Підстригач Я. С., Коляно Ю. М. Рівняння узагальненої термопружності для тіл з тонкими включеннями // Докл. АН СРСР. – 1975. – Т. 224, № 4. – С. 794–797.
 104. Медведєва Н. Ю. Деякі задачі нелінійної статистичної термопружності для багатозв'язкових областей: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04 / АН УРСР, Ін-т механіки АН УРСР. – К., 1978. – 13 с.
 105. Гузь Г. В. Деякі просторові задачі термопружності для багатозв'язкових областей: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.02.03 / МВ та СЗГ УРСР. – Київ, 1971. – 14 с.
 106. Sethi S. P., Thompson G. L. Optimal control theory. Applications to management science and economics. – New York: Springer, 2000. – 506 p. <https://doi.org/10.1007/0-387-29903-3>
 107. Bendsøe M. P., Sigmund O. Topology optimization. Theory, methods and applications. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2003. – 370 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6>
 108. Lenhart S., Workman J. T. Optimal control applied to biological models. – London: Chapman & Hall/CRC, 2007. – 280 p. <https://doi.org/10.1201/9781420011418>

109. Anita S., Arnautu V., Capasso V. An introduction to optimal control problems in life sciences and economics: from mathematical models to numerical simulation with MATLAB. – Birkhäuser, 2010. – 244 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8098-5>
110. Chen P., Islam S. M. N. Optimal control models in finance. – Boston: Springer, 2005. – 200 p. <https://doi.org/10.1007/b101888>
111. Boltyanski V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F., Pontryagin L. S. The maximum principle in the theory of optimal processes of control // IFAC Proc. Vol. – 1960. – Vol. 1, Is. 1. – P. 464–469.
112. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. The mathematical theory of optimal processes. – New York: Wiley Interscience, 1962. – 360 p.
113. Bellman R. Dynamic programming and a new formalism in the calculus of variations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1954. – Vol. 40. – P. 231–235. <https://doi.org/10.1073/pnas.40.4.23>
114. Bellman R. Dynamic programming. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1957. – 339 p.
115. Lions J.-L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1971. – 400 p.
116. Lions J.-L., Stampacchia G. Variational inequalities // Comm. Pure and Appl. Math. – 1967. – Vol. 20. – P. 493–519. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160200302>
117. Wang P. K. C. Control distributed parameter systems // In: Leondes C. T. (Ed.) Advances in control systems. Theory and applications. – New York–London: Academic Press, 1964. – Vol. 1. – P. 75–172.
118. Акбаров Д. Є., Мізерний В. М. Необхідні умови оптимального керування об'єктами з розподіленими параметрами. Частина III // Вісник ВПІ. – 2003. – № 5. – С. 104–110.
119. Ніколаєв О. Г. Метод визначення оптимального керування напружено-деформованим станом складного тіла за допомогою стаціонарного температурного поля // Проблеми проектування і виробництва конструкцій

- літальних апаратів: зб. наук. пр. НАУ ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». – 2009. – Вип. 3(59). – С. 109–120.
120. Nikolaev O., Skitska M. The method of determining the optimal control of the thermoelastic state of a piece-homogeneous body using a stationary temperature field // *Radioelectronic and Computer Systems*. – 2024. – No. 2(110). – P. 98–119. <https://doi.org/10.32620/reks.2024.2.09>
 121. Vigak V. M., Kostenko A. V. Optimal control of plate heating under constraints on the temperature field gradient // *Soviet Applied Mechanics*. – 1979. – Vol. 15, No. 4. – P. 306–311.
 122. Вігак В. М., Костенко А. В. Оптимальне керування нагріванням пластини при обмеженнях на градієнти температурного поля // *Прикл. механіка*. – 1979. – Т. 15, № 4. – С. 43–49.
 123. Vigak V. M., Kolesov V. S., Velichko L. D. Optimal control of heating of a thermoviscoelastic cylinder // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 1981. – Вип. 14. – С. 81–84.
 124. Вігак В. М. Керування температурними напруженнями та переміщеннями. – Київ: Наук. думка, 1988. – 312 с.
 125. Yasinsky A. V. Determination and optimization of stress state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems // *Encyclopedia of Thermal Stresses* / ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht : Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 916–924.
 126. Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinskij A. V. The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain // *Journal of Thermal Stresses*. – 1998. – Vol. 21, № 5. – P. 545–561.
 127. Vihak V. M., Yasinskii A. V., Yuzvyak M. Y. Optimal control of the heating of thermosensitive canonical bodies with constraints on the stress in the plastic zone // *International Applied Mechanics*. – 1995. – Vol. 31, № 12. – P. 997–1003.
 128. Vigak V. M., Svirida M. I. Optimal Control of Two-dimensional Nonaxisymmetric Temperature Field in a Hollow Cylinder with Thermoelastic Stress Restrictions // *International Applied Mechanics*. – 1995. – Vol. 31. – P. 448–454. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00846797>.

129. Kalynyak B. M., Tokovyy Y. V., Yasinsky A. V. Direct and Inverse Problems of Thermomechanics Concerning the Optimization and Identification of the Thermal Stressed State of Deformed Solids // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 236. – P. 21–34. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4095-3>.
130. Кушнір Р. М., Ясінський А. В. Оптимальне керування нагріванням прямокутної термочутливої області за обмежень на напруження у пластичній зоні // Доповіді Національної академії наук України. – 2010. – № 1. – С. 66–70.
131. Сергієнко І. В., Дейнека В. С. Ідентифікація параметрів задачі про напружено-деформований стан багатокомпонентного пружного тіла з включенням // Прикладна механіка. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 14–24.
132. Сергієнко І. В., Дейнека В. С. Системний аналіз багатокомпонентних розподілених систем. – Київ : Наукова думка, 2009. – 640 с.
133. Аралова А. А., Дейнека В. С. Чисельне розв'язання зворотних крайових задач осесиметричного термопружного деформування довгого товстого порожнистого циліндра // Комп'ютерна математика. – 2011. – Вип. 1. – С. 3–12.
134. Аралова А. А. Чисельне розв'язання обернених задач термопружності для складеного циліндра // Кібернетика та системний аналіз. – 2014. – № 5. – С. 164–172. URL: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/124706>.
135. Сергієнко І. В., Дейнека В. С. Оптимальне керування еліптичною системою з умовами спряження у вигляді рівняння теплопровідності // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2005. – № 1. – С. 7–29.
136. Дейнека В. С. Оптимальне керування нестационарним тепловим процесом та ідентифікація параметрів середовища при відомих теплових потоках // Доповіді Національної академії наук України. – 2012. – № 8. – С. 28–35.
137. Аралова А. А. Про деякі задачі ідентифікації щільності теплового потоку температурного стану циліндричної оболонки з порожниною // Кібернетика та комп'ютерні технології. – 2020. – № 1. – С. 32–40.
138. Дейнека В. С., Аралова А. А. Оптимальне керування термонапруженим станом порожнистого довгого циліндра // Доповіді Національної академії наук України. – 2012. – № 5 – С. 38–42.

139. Meriç R. A. Coupled optimization in steady-state thermoelasticity // *Journal of Thermal Stresses*. – 1985. – Vol. 8, № 3. – P. 333–347. DOI: <https://doi.org/10.1080/01495738508942240>.
140. Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В. Оптимальне керування нагріванням тонкої платівки // *Математичні методи та фізико-механічні поля*. – 1976. – Вип. 4. – С. 77–79.
141. Gachkevich O. R., Gachkevich M. G. Optimal Heating of a Piecewisehomogeneous Cylindrical Glass Shell by the Surrounding Medium and Heat Sources // *Journal of Mathematical Sciences*. – 1999. – Vol. 96. – P. 2935–2939.
142. Чекурін В. Ф., Постолак Л. І. Застосування варіаційного методу однорідних розв'язків для оптимального керування осесиметричним термопружним станом циліндра // *Математичні методи та фізико-механічні поля*. – 2017. – Т. 60, № 2. – С. 105–116.
143. Kulik F., Dergachov K., Pasichnik S., Sokol D. Rational control of the temperature of vortex energy separator under destabilizing influence // *Radioelectronic and Computer Systems*. – 2022. – № 3 (103). – P. 47–66. DOI: <https://doi.org/10.32620/reks.2022.3.04>.
144. Saviz Mowlavi, Saleh Nabi. Optimal control of PDEs using physics-informed neural networks // *Journal of Computational Physics*. – 2023. – Vol. 473. – Article 111731. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111731>.
145. Abdelhak Hafdallah, Abdelhamid Ayadi. Optimal control of a thermoelastic body with missing initial conditions // *International Journal of Control*. – 2020. – Vol. 93, № 7. – P. 1570–1576. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1519258>.
146. Bonnans J. F., Casas E. A boundary Pontryagin's principle for the optimal control of state-constrained elliptic systems // *International Series of Numerical Mathematics*. – 1992. – Vol. 107. – P. 241–249.
147. Casas E., Tröltzsch F. First- and second-order optimality conditions for a class of optimal control problems with quasilinear elliptic equations // *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 2009. – Vol. 48, № 2. – P. 688–718. DOI: <https://doi.org/10.1137/080720048>.

148. Casas E., Tröltzsch F. Numerical analysis of some optimal control problems governed by a class of quasilinear elliptic equations // *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*. – 2011. – Vol. 17. – P. 771–800. DOI: <https://doi.org/10.1051/cocv/2010025>.
149. Ciuperca I., Talibi M., Jai M. On the optimal control of coefficients in elliptic problems. Application to the optimization of the head slider // *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*. – 2005. – Vol. 11. – P. 102–121. DOI: <https://doi.org/10.1051/cocv:2004029>.
150. Ge L., Niu H., Zhou J. Convergence Analysis and Error Estimate for Distributed Optimal Control Problems Governed by Stokes Equations with Velocity-Constraint // *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*. – 2022. – Vol. 14, № 1. – P. 33–55. DOI: <https://doi.org/10.4208/aamm.OA-2020-0302>.
151. Allendes A., Fuica F., Otarola E., Quero D. A posteriori error estimates for semilinear optimal control problems // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. – 2021. – Vol. 55. – P. 2293–2322. DOI: <https://doi.org/10.1051/m2an/2021033>.
152. Becker R., Kapp H., Rannacher R. Adaptive Finite Element Methods for Optimal Control of Partial Differential Equations: Basic Concept // *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 2000. – Vol. 39, № 1. – P. 113–132. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0363012999351097>.
153. Farag M. H. The gradient projection method for solving an optimal control problem // *Applicationes Mathematicae*. – 1996. – Vol. 24, № 2. – P. 141–147. URL: <http://eudml.org/doc/219158>.
154. Farag M. H. Computing optimal control with a quasilinear parabolic partial differential equation // *Surveys in Mathematics and its Applications*. – 2009. – Vol. 4. – P. 139–153.
155. Arada N., Raymond J.-P. Optimal control problems with mixed control-state constraints // *SIAM J. Control Optim.* – 2000. – Vol. 39, No. 5. – P. 1391–1407. – DOI: [10.1137/S0363012999357926](https://doi.org/10.1137/S0363012999357926).

156. Kenne C., Djomegne L., Zongo P. Second-order optimality conditions for the bilinear optimal control of a degenerate parabolic equation // arXiv:2212.11046v1 [math.OC]. – 2022. – P. 1–19. – DOI: 10.48550/arXiv.2212.11046.
157. Thünen A., Leyffer S., Sager S. State elimination for mixed-integer optimal control of partial differential equations by semigroup theory // Optim. Control Appl. Meth. – 2022. – Vol. 43. – P. 867–883. – DOI: 10.1002/oca.2861.
158. Alam T.-M., Nicaise S., Paquet L. An optimal control problem governed by heat equation with nonconvex constraints applied to selective laser melting process // Minimax Theory and its Applications. – 2021. – Vol. 6, No. 2. – P. 191–204. – hal-02302403.
159. Mazari I. Existence of optimal shapes in parabolic bilinear optimal control problems // Preprint. – 2023. – P. 1–23. – URL: <https://hal.science/hal-040022742023>.
160. Pan L., Yong J. Optimal control for quasilinear retarded parabolic systems // ANZIAM J. – 2001. – Vol. 42. – P. 532–551. – DOI: 10.1017/S1446181100012268.
161. Lou H. Optimality conditions for semilinear parabolic equations with controls in leading term // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. – 2011. – Vol. 17. – P. 975–994. – DOI: 10.1051/cocv/2010034.
162. Власенко Л. А., Самойленко А. М. Оптимальне керування з імпульсною складовою системою, описуваними неявними параболічними диференціально-операторними утвореннями // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 8. – С. 1053–1065.
163. Копець М. М. Оптимальне керування осесиметричними коливаннями круглої мембрани // Доповіді Національної академії наук України. – 2015. – № 9. – С. 33–38.
164. Meriç R. A. Coupled optimization in steady-state thermoelasticity // Journal of Thermal Stresses. – 1985. – Vol. 8, No. 3. – P. 333–347. – DOI: 10.1080/01495738508942240.
165. Zasadna K. E. Numerical solution of the problem of optimal control of the heating of a thermoelastic plate by internal heat sources // Journal of Soviet Mathematics. – 1993. – Vol. 63. – P. 70–74.

166. Hafdallah A., Ayadi A. Optimal control of a thermoelastic body with missing initial conditions // International Journal of Control. – 2020. – Vol. 93, No. 7. – P. 1570–1576. – DOI: 10.1080/00207179.2018.1519258.