

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Кафедра «Вищої математики та системного аналізу» (№ 405)



РОБОЧА ПРОГРАМА ВИБІРКОВОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Аналіз операторних рівнянь

(назва навчальної дисципліни)

Галузь знань: 11 «Математика та статистика»
(шифр і найменування галузі знань)

Спеціальність: 113 «Прикладна математика»
(код та найменування спеціальності)

Освітня програма: «Прикладна математика»
(найменування освітньої програми)

Форма навчання: денна

Рівень вищої освіти третій (освітньо-науковий)

Харків 2023 рік

Робоча програма «Аналіз операторних рівнянь»

(назва дисципліни)

для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика» освітньої програми: «Прикладна математика».

«26» червня 2023 р., 12 с.

Розробник: Ніколаєв О.Г. завідувач кафедри вищої математики та системного аналізу, д.ф.-м.н., професор

(прізвище та ініціали, посада, науковий ступінь та вчене звання)



Робочу програму розглянуто на засіданні кафедри вищої математики та системного аналізу

(назва кафедри)

Протокол № 10 від « 30 » червня 2023 р.

Завідувач кафедри д.ф.-м.н., професор

(науковий ступінь та вчене звання)



О.Г. Ніколаєв

(ініціали та прізвище)

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, освітня програма, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни (денна форма навчання)
Кількість кредитів – 7	Галузі знань <u>11 «Математика та статистика»</u> <small>(шифр та найменування)</small> Спеціальність <u>113 «Прикладна математика»</u> <small>(код та найменування)</small> Освітня програма <u>«Прикладна математика»</u> <small>(найменування)</small> Рівень вищої освіти: третій (освітньо-науковий)	Вибіркова компонента з переліку 1
Кількість модулів – 2		Навчальний рік
Кількість змістовних модулів – 4		2023/2024
Індивідуальне завдання _____ <small>(назва)</small>		Семестр
Загальна кількість годин – 80/210		2-й
Кількість тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 5 години; самостійної роботи студента – 8 годин		Лекції ¹⁾
		48 годин
		Практичні, семінарські ¹⁾
		32 години
		Лабораторні ¹⁾
	___ годин	
	Самостійна робота	
130 годин		
Вид контролю	модульний контроль, іспит	

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить: 80/130

¹⁾ Аудиторне навантаження може бути зменшене або збільшене на одну годину в залежності від розкладу занять.

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета: отримання знань, умінь і навичок з дослідження та розв'язання операторних рівнянь.

Завдання: опрацювання основних понять теорії операторів і методів аналітичного та числового аналізу операторних рівнянь.

Після вивчення дисципліни студенти повинні поглибити професійні знання, уміння та навички, які формують в межах обраної ОНП такі **компетентності:**

- здатність розв'язувати комплексні проблеми в галузі професійної та/або дослідницько-інноваційної діяльності у сфері математики та статистики;
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел;
- здатність виконувати оригінальні дослідження, досягати наукових результатів, які створюють нові знання у галузях математики і статистики та дотичних до них міждисциплінарних напрямках і можуть бути опубліковані у провідних наукових фахових виданнях з та суміжних галузей;
- здатність застосовувати сучасні інформаційні технології, бази даних та інші електронні ресурси, спеціалізоване програмне забезпечення у науковій та навчальній діяльності;
- здатність виявляти, ставити та вирішувати проблеми дослідницького характеру у науковому пізнанні, оцінювати та забезпечувати якість виконуваних досліджень;
- здатність дотримуватись етики досліджень, а також правил академічної доброчесності в наукових дослідженнях та науково-педагогічній діяльності;
- здатність до продукування нових ідей і розв'язання комплексних проблем наукового пізнання, а також до застосування сучасних методологій, методів та інструментів педагогічної та наукової діяльності у сфері прикладної математики.

Та здобути **додаткові компетентності:**

- здатність знаходити універсальні підходи до розв'язання прикладних задач у різних предметних областях;
- здатність створювати нові моделі механіки деформівного твердого тіла, а також нові методи дослідження полів і процесів при напруженні, деформуванні та руйнуванні матеріалів;
- володіння методами розв'язання крайових задач теорії пружності та навичками роботи в спеціалізованих обчислювальних пакетах прикладних програм;
- здатність аналізувати моделі механіки деформівного твердого тіла аналітичними і числовими методами.

Програмні результати навчання:

- мати передові концептуальні та методологічні знання з прикладної математики і на межі предметних галузей, а також дослідницькі навички, достатні для проведення наукових і прикладних досліджень на рівні останніх св

- ітових досягнень з відповідної галузі,
отримання нових знань та/або здійснення інновацій;
- формулювати і перевіряти гіпотези;
використовувати для обґрунтування висновків належні докази, зокрема,
результати теоретичного аналізу, експериментальних досліджень
(опитувань, спостережень тощо)
і математичного та/або комп'ютерного моделювання, наявні літературні дані;
- розробляти та досліджувати концептуальні,
математичні комп'ютерні моделі процесів і систем,
ефективно використовувати їх для отримання нових знань та/або створення ін
новаційних продуктів у прикладній математиці та дотичних міжdisciplinary
напрямах;
- планувати і виконувати експериментальні та/або теоретичні дослідження з при
кладної математики та дотичних міжdisciplinary напрямів в використанн
ям сучасних інструментів,
критично аналізувати результати власних досліджень і результати інших дослі
дників у контексті цього комплексу сучасних знань щодо досліджуваної проб
леми;
- розуміти загальні принципи та методи прикладної математики,
атак ж методологію наукових досліджень,
застосувати їх у власних дослідженнях у сфері прикладної математики та у ви
щадацькій практиці.

Для одержання програмних результатів навчання студент повинен

знати:

означення і властивості лінійних операторів у банахових і гільбертових просторах;

основи спектральної теорії операторів;

типи операторних рівнянь і методи їх дослідження;

стійкість операторних рівнянь при збуренні параметрів;

основні числові методи розв'язання операторних рівнянь;

уміти:

визначати тип операторного рівняння та властивості його оператора;

визначати спектральні характеристики операторів;

призначати методи аналізу операторного рівняння;

застосовувати числові методи розв'язання операторних рівнянь;

досліджувати рівняння на стійкість.

Міждисциплінарні зв'язки: базою для засвоєння курсу є «Функціональний аналіз», «Диференціальні рівняння», «Рівняння математичної фізики». Використовується в дисциплінах: «Диференціальні рівняння в частинних похідних», «Крайові задачі механіки деформованого твердого тіла».

3. Програма навчальної дисципліни

Модуль 1

Змістовний модуль 1. Елементи теорії лінійних обмежених операторів

Тема 1. Лінійні обмежені оператори в банахових і гільбертових просторах

Зведення деяких фактів з курсу «Функціональний аналіз» (лінійний обмежений функціонал, норма, спряжений простір, теореми Ріса і Хана-Банаха, неперервно оборотні та цілком неперервні оператори). Нормований фактор-простір за лінійним многовидом. Збіжність послідовності у фактор-просторі. Принцип рівномірної обмеженості. Слабка збіжність у нормованому просторі. Різні види збіжності (рівномірна, сильна, слабка) в нормованому просторі обмежених операторів. Теорема Банаха – Штейнгауза. Приклад з теорії інтегральних рівнянь. Спряжені та самоспряжені оператори в гільбертовому просторі, їх властивості. Співвідношення між ядрами та образами спряжених операторів. Норма самоспряженого оператора в гільбертовому просторі. Невід’ємні оператори. Проектори.

Тема 2. Спектр лінійного обмеженого оператора

Резольвентна множина, регулярна точка, резольвента лінійного обмеженого оператора. Теорема про відкритість резольвентної множини. Спектр оператора. Означення точкового, неперервного та залишкового спектрів. Приклади. Аналітичність резольвенти. Спектральний радіус оператора. Спектр цілком неперервного оператора. Спектр самоспряженого оператора. Спектр цілком неперервного самоспряженого оператора. Теорема Гільберта – Шмідта. Застосування до побудови функції Гріна крайової задачі Штурма – Ліувілля.

Модульний контроль

Модуль 2

Змістовний модуль 2. Елементи теорії лінійних необмежених операторів

Тема 3. Лінійні необмежені оператори в банахових і гільбертових просторах

Замкнені оператори. Графік оператора. Оператори, що допускають замкнення. Теорема Банаха про замкнений оператор. Норма графіка. Спряжені оператори, їх властивості. Нормально розв’язні оператори. Критерій нормальної розв’язності. Нетерові оператори. Дефектні числа оператора, їх зміст. Індекс оператора, його обчислення. Лівий і правий регуляризатори для лінійного замкненого оператора. Критерій нетеровості оператора через існування його регуляризаторів. Оператор, спряжений з нетеровим оператором. Теорема про збурення нетерового оператора цілком неперервним оператором. Аналог теорем Фредгольма для нетерових операторів.

Змістовний модуль 3. Аналіз лінійних операторних рівнянь

Тема 4. Аналіз деяких класів лінійних операторних рівнянь

Рівняння з компактними операторами. Оцінка похибки наближеного розв’язку

операторного рівняння. Число обумовленості оператора. Застосування до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь і інтегральних рівнянь. Рівняння з додатно визначеним оператором. Енергетичний простір і енергетична норма. Узагальнений розв'язок рівняння з додатно визначеним оператором. Розширення за Фрідріхсом додатно визначеного оператора. Метод Рітца. Сингулярні інтегральні рівняння.

Змістовний модуль 4. Нелінійні і некоректні задачі

Тема 5. Аналіз деяких типів нелінійних рівнянь

Похідна Фреше нелінійного оператора. Похідна композиції операторів. Диференціювання операторів від декількох змінних. Формула Лагранжа. Похідна Гато нелінійного оператора. Зв'язок диференційовності по Фреше і Гато. Похідні та диференціали Фреше старших порядків. Формула Тейлора. Теореми про неявний оператор. Точки розгалуження і біфуркації операторних рівнянь. Теореми про нерухомі точки нелінійних операторів. Принцип стискаючих операторів. Теорема Брауера. Теорема Шаудера. Метод Ньютона наближеного розв'язання нелінійного операторного рівняння.

Тема 6. Некоректні задачі і методи їх розв'язання

Деякі приклади некоректних задач. Означення коректної задачі за Адамаром. Означення умовно-коректної задачі. Метод підбору. Метод квазірозв'язку. Означення квазірозв'язку. Теорема про єдиність і неперервність квазірозв'язку на компактi. Побудова квазірозв'язку у гільбертовому просторі. Задача на екстремум функціонала. Означення регуляризуючої сім'ї операторів. Метод Лаврентьєва. Стабілізуючий функціонал. Метод регуляризації Тихонова. Застосування до розв'язання інтегрального рівняння першого роду в гільбертовому просторі.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістовних модулів і тем	Кількість годин				
	Усього	У тому числі			
		л	п	лаб.	с. р.
1	2	3	4	5	6
Модуль 1					
Змістовний модуль 1. Елементи теорії лінійних обмежених операторів					
Тема 1. Лінійні обмежені оператори в банахових і гільбертових просторах	42	8	10		24
Тема 2. Спектр лінійного обмеженого оператора	24	6	4		14
Модульний контроль	2		2		
Разом за змістовним модулем 1	68	14	16		38
Модуль 2					
Змістовний модуль 2. Елементи теорії лінійних необмежених операторів					
Тема 3. Лінійні необмежені оператори в банахових і гільбертових просторах	36	6	6		24

Разом за змістовним модулем 2	36	6	6		24
Змістовний модуль 3. Аналіз лінійних операторних рівнянь					
Тема 4. Аналіз деяких класів операторних рівнянь	48	12	4	-	32
Разом за змістовним модулем 3	48	12	4		32
Змістовний модуль 4. Нелінійні і некоректні задачі					
Тема 5. Аналіз деяких типів нелінійних рівнянь	28	8	2		18
Тема 6. Некоректні задачі і методи їх розв'язання	28	8	2		18
Модульний контроль	2		2		
Разом за змістовним модулем 4	58	16	6		36
Усього годин	210	48	32		130

5. Теми семінарських занять

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Слабка збіжність у нормованому просторі	2
2	Послідовності лінійних обмежених операторів. Різні типи збіжності	2
3	Обернені та неперервно оборотні оператори	2
4	Спряжені оператори в гільбертовому просторі.	2
5	Цілком неперервні оператори. Оператори Гільберта – Шмідта.	2
6	Спектр лінійного обмеженого оператора.	2
7	Спектр цілком неперервного самоспряженого оператора	2
8	Модульний контроль	2
9	Замкнені оператори. Нормально розв'язні оператори	2
10	Фредгольмові оператори	2
11	Необмежені оператори в гільбертовому просторі	2
12	Аналіз деяких типів операторних рівнянь	2
13	Лінійні інтегральні рівняння. Наближені методи аналізу операторних рівнянь	2
14	Розв'язання нелінійних операторних рівнянь	2
15	Некоректні задачі	2
16	Модульний контроль	2

	Разом	32
--	--------------	----

7. Теми лабораторних занять

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	2	3
1	Лінійні обмежені оператори в банахових і гільбертових просторах (Тема 1)	24
2	Спектр лінійного обмеженого оператора(Тема 2)	14
3	Лінійні необмежені оператори в банахових і гільбертових просторах(Тема 3)	24
4	Аналіз деяких класів операторних рівнянь(Тема 4)	32
5	Аналіз деяких типів нелінійних рівнянь (Тема 5)	18
6	Некоректні задачі і методи їх розв'язання (Тема 6)	18
	Разом	130

9. Індивідуальні завдання

№ з/п	Назва теми
1	

10. Методи навчання

Проведення аудиторних лекцій, практичних занять, індивідуальні консультації, самостійна робота студентів за матеріалами, опублікованими кафедрою

11. Методи контролю

Проведення поточного контролю, письмового модульного контролю, фінальний контроль у вигляді іспиту.

12. Критерії оцінювання та розподіл балів, які отримують студенти

12.1. Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Складові навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
Змістовний модуль 1			
Робота на лекціях	0...1	7	0...7
Робота на практичних заняттях	0...4	7	0...28
Самостійна робота	0...1	6	0...6
Модульний контроль	0...24	1	0...24
Змістовний модуль 2			

Робота на лекціях	0...1	3	0...3
Робота на практичних заняттях	0...4	3	0...12
Самостійна робота	0...1	3	0...3
Змістовний модуль 3			
Робота на лекціях	0...1	6	0...6
Робота на практичних заняттях	0...4	2	0...8
Самостійна робота	0...1	2	0...2
Змістовний модуль 4			
Робота на лекціях	0...1	8	0...8
Робота на практичних заняттях	0...4	2	0...8
Самостійна робота	0...1	2	0...2
Модульний контроль	0...24	1	0...24
Всього за семестр(*)			0...141

(*) Якщо кількість модульних балів у студента перевищує 100, то як підсумкову оцінку виставляється 100 балів.

Семестровий контроль (іспит) проводиться у разі відмови студента від балів поточного контролю. При складанні семестрового іспиту студент має можливість отримати максимум 100 балів.

Білет для іспиту/заліку складається з чотирьох питань (двох теоретичних і двох практичних). За кожне питання студент може одержати максимальну суму балів - 25.

12.2. Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань для одержання позитивної оцінки:

Задовільно (60-74). Оцінка ставиться, якщо студент знає загальні поняття теорії лінійних операторів у банахових і гільбертових просторах, вміє знаходити тип оператора, його норму, границі послідовностей операторів, проводити аналіз простих типів операторних рівнянь.

Добре (75-89). Оцінка ставиться, якщо студент, крім зазначеного вище, вільно володіє логіко-понятійним апаратом курсу, може обґрунтувати основні його положення, вміє досліджувати операторні рівняння і знає чисельні схеми їх розв'язання.

Відмінно (90-100). Оцінка ставиться, якщо студент, має стійкі системні знання з дисципліни, вміє їх обґрунтовувати, узагальнювати та продуктивно їх використовує на творчому рівні. Задачі білету розв'язані та мають пояснення до кожного етапу розв'язання. Студент вільно володіє понятійним апаратом, вміє логічно мислити, аналізувати нестандартні ситуації. Вміє аналізувати операторні рівняння, знаходити їх наближені розв'язки, контролювати похибки таких наближень.

12.3 Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру

Протягом семестру студент отримує бали за накопичувальною системою згідно з таблицею наведеною в п. 12.1. Дано деякі пояснення до таблиці.

Робота на лекції – активна форма засвоєння матеріалу курсу: 1 бал ставиться за продумані питання, які студент задає лектору, участь в обговоренні предмета лекції, відповіді на питання, які по ходу лекції задає викладач. Активність студента може заохочуватися додатковими коефіцієнтами, які множаться на 1 бал.

Робота на практичному занятті оцінюється так: 3 бали за самостійно розв'язану задачу або 1 бал за розв'язану задачу за допомогою викладача, 1 бал за обґрунтовану відповідь на теоретичне питання з доведенням основних положень біля дошки.

Самостійна робота – 1 бал ставиться студенту за виконання домашнього завдання разом з його захистом в поза аудиторний час.

Модульний контроль проводиться два рази на семестр на 8 і 16 тижнях на практичних заняттях. Білет для модульного контролю включає 4 питання (два теоретичних і два практичних). За відповідь на одне питання студент може отримати максимально 6 балів. Критерії оцінювання у відсотковому відношенні відповідають якісним критеріям з п. 12.2.

Шкала оцінювання: бальна і традиційна

Сума балів	Оцінка за традиційною шкалою	
	Іспит, диференційований залік	Залік
90 – 100	Відмінно	Зараховано
75 – 89	Добре	
60 – 74	Задовільно	
0 – 59	Незадовільно	Не зараховано

13. Методичне забезпечення

Підручники, навчальні посібники, які видані в університеті:

Ніколаєв О.Г., Рвачова Т.В., Соловйов О.И. Функціональний аналіз. Навчальний посібник. – Х.: ХАІ, 2008.

Електронний ресурс, на якому розміщено навчально-методичний комплекс дисципліни: [//library.khai.edu](http://library.khai.edu). Комплекс включає в себетакіобов'язкові складові:

- робоча програма дисципліни;
- конспект лекцій, підручники (навчальні посібники), в тому числі в електронному вигляді, які за змістом повністю відповідають робочій програмі дисципліни;

- методичні вказівки та рекомендації для виконання розрахункових та практичних робіт , а також рекомендації для самостійної підготовки;
- тематики індивідуальних завдань;
- приклади розв'язування типових задач чи виконання типових завдань;
- питання для контрольних заходів;

14. Рекомендована література

Базова

1. Ніколаєв О.Г., Рвачова Т.В., Соловйов О.И. Функціональний аналіз. Навчальний посібник. – Х.: ХАІ, 2008.
2. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз. – Львів, 2014.
3. Федак І.В. Функціональний аналіз. Навч. посібник. – Івано-Франківськ, 2011.
4. Боярищева Т.В., Гудивок Т.В., Погоріляк О.О. Функціональний аналіз. Навч. посібник. – Ужгород, 2013.
5. Ус С.А. Функціональний аналіз: навч. посібник. – Дніпро: НГУ, 2013.
6. Охріменко М.Г., Жуковська О.А., Купка О.О. Методи розв'язання некоректно поставлених задач. Навч. посіб. – Київ: ЦУЛ, 2017.

Допоміжна

1. Hutson V., Pym J.S., Cloud M., J. Applications of Functional Analysis and Operator Theoru. – Heidelberg, London, New York: ELSEVIER, 2005.
2. Akerkar R. Nonlinear Functional Analysis. – New Delhi, Madras, Bombay, Calcutta, London: Narosa Publishing House, 1999.
3. Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications. – New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
4. Brezis H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. -New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2011.
5. Curtain R.F., Pritchard A.J. Functional Analysis and Modern Applied Mathematics. – London, New York, San Francisco: Academic Press, 1977.
6. MacCluer B.D. Elementary Functional Analysis. – New York: Springer, 2009.
7. Siddiqi A.H. Applied Functional Analysis. Numerical Methods, Wavelet Methods and Image Processing. –New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2004.
8. Fujita H., Saito N., Suzuki T. Operator Theory and Numerical Methods. – Amsterdam, London, New York, Oxford, Paris, Shannon, Tokyo: ELSEVIER, 2001.
9. Saxe K. Beginning Functional Analysis. – New York: Springer-Verlag, 2002.
10. Rynne B.P., Youngson M.A. Linear functional analysis. – London: Springer-Verlag, 2008.

15. Інформаційні ресурси

Сайт бібліотеки Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» <https://library.khai.edu>.