

Міністерство освіти і науки України

Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського
“Харківський авіаційний інститут”



ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи

В. В. Павліков

(ініціали та прізвище)

« 31 » 08 2022 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА
ВИБІРКОВОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

Крайові задачі теорії пружності

(назва навчальної дисципліни)

Галузь знань: 13 «Математика та статистика»

(шифр і назва галузі)

Спеціальність: 113 «Прикладна математика»

(код та найменування спеціальності)

Освітня програма: «Прикладна математика»

(найменування освітньої програми)

Рівень вищої освіти: третій (освітньо-науковий)

Форма навчання: денна

Харків 2022 рік

Робоча програма «Крайові задачі механіки деформівного твердого тіла» для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика» освітньої програми «Прикладна математика»

« 28 » серпня 2022 р. – 12 с.

Розробник: Ніколаєв О.Г. _завідувач кафедри вищої математики та системного аналізу, д.ф.-м.н., професор

(прізвище та ініціали, посада, науковий ступінь та вчене звання)



Робочу програму розглянуто на засіданні кафедри вищої математики та системного аналізу

(назва кафедри)

Протокол № 1 від « 30 » серпня 2022 р.

Завідувач кафедри: д.фіз.-мат.н, професор

(науковий ступінь та вчене звання)



О.Г.Ніколаєв
(ініціали та прізвище)

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, освітня програма, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни (денна форма навчання)
Кількість кредитів – 5,5	Галузі знань <u>11 «Математика та статистика»</u> (шифр та найменування) Спеціальність <u>113 «Прикладна математика»</u> (код та найменування) Освітня програма <u>«Прикладна математика»</u> (найменування) Рівень вищої освіти: третій (освітньо-науковий)	Вибіркова компонента з переліку 3
Кількість модулів – 2		Навчальний рік
Кількість змістовних модулів – 3		2022/2023
Індивідуальне завдання _____ (назва)		Семестр
Загальна кількість годин – 64/165		4-й
		Лекції ¹⁾
Кількість тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 4 години; самостійної роботи студента – 6 годин (перша половина), 7 годин (друга половина)		32 годин
		Практичні, семінарські¹⁾
		32 години
		Лабораторні ¹⁾
	_____ годин	
	Самостійна робота	
	101 годин	
	Вид контролю	
	модульний контроль, іспит	

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить: 64/101

¹⁾ Аудиторне навантаження може бути зменшене або збільшене на одну годину в залежності від розкладу занять.

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета: засвоєння основних положень теорії спеціальних функцій та їх застосування до побудови розв'язків крайових задач для рівнянь Лапласа і Ламе в канонічних просторових областях.

Завдання: відпрацювання основних понять, формул, методів та алгоритмів дисципліни, а саме: означення, диференціальні рівняння, властивості основних спеціальних функцій, метода Фур'є для рівняння Лапласа і Ламе в циліндричних, сферичних, сфероїдальних координатах, узагальненого методу Фур'є для двозв'язних осесиметричних тіл. Розробка програм для числового розв'язання задач.

Після вивчення дисципліни студенти повинні поглибити професійні знання, уміння та навички, які формують в межах обраної ОНП такі **компетентності:**

Здатність розв'язувати комплексні проблеми в галузі професійної та/або дослідницько-інноваційної діяльності у сфері математики та статистики, що передбачає глибоке переосмислення наявних та створення нових цілісних знань та/або професійної практики.

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу

ЗК02. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

СК01. Здатність виконувати оригінальні дослідження, досягати наукових результатів, які створюють нові знання у галузях математики і статистики та дотичних до них міждисциплінарних напрямках і можуть бути опубліковані у провідних наукових фахових виданнях з та суміжних галузей.

СК05. Здатність виявляти, ставити та вирішувати проблеми дослідницького характеру у науковому пізнанні, оцінювати та забезпечувати якість виконуваних досліджень.

СК07. Здатність дотримуватись етики досліджень, а також правил академічної доброчесності в наукових дослідженнях та науково-педагогічній діяльності.

СК09. Здатність до продукування нових ідей і розв'язання комплексних проблем наукового пізнання, а також до застосування сучасних методологій, методів та інструментів педагогічної та наукової діяльності у сфері прикладної математики.

Та здобути **додаткові компетентності:**

- здатність знаходити універсальні підходи до розв'язання прикладних задач у різних предметних областях;
- здатність аналізувати моделі механіки деформівного твердого тіла аналітичними і числовими методами.

Програмні результати навчання:

ПРН01. Мати передові концептуальні та методологічні знання з прикладної математики і на межі предметних галузей, а також дослідницькі навички, достатні для проведення наукових і прикладних досліджень на рівні останніх світових досягнень з відповідної галузі, отримання нових знань та/або здійснення інновацій.

ПРН03. Формулювати і перевіряти гіпотези; використовувати для

обґрунтування висновків належні докази, зокрема, результати теоретичного аналізу, експериментальних досліджень (опитувань, спостережень тощо) і математичного та/або комп'ютерного моделювання, наявні літературні дані.

ПРН04. Розробляти та досліджувати концептуальні, математичні і комп'ютерні моделі процесів і систем, ефективно використовувати їх для отримання нових знань та/або створення інноваційних продуктів у прикладній математиці та дотичних міждисциплінарних напрямках.

ПРН05. Планувати і виконувати експериментальні та/або теоретичні дослідження з прикладної математики та дотичних міждисциплінарних напрямів з використанням сучасних інструментів, критично аналізувати результати власних досліджень і результати інших дослідників у контексті усього комплексу сучасних знань щодо досліджуваної проблеми.

ПРН08. Розуміти загальні принципи та методи прикладної математики, а також методологію наукових досліджень, застосувати їх у власних дослідженнях у сфері прикладної математики та у викладацькій практиці.

Для одержання програмних результатів навчання студент повинен знати:

теорію гамма- і бета-функцій, теорію лінійних диференціальних рівнянь у комплексній площині з аналітичними коефіцієнтами, диференціальні рівняння, подання рядами, інтегральні зображення, властивості, асимптотичні формули функцій Бесселя, Неймана, модифікованих функцій Бесселя, функцій Лежандра першого і другого роду, гіпергеометричних функцій;

постановки основних та мішаних крайових задач для рівняння Лапласа в півпросторі, циліндрі, кулі та сфероїді, метод розділення змінних в криволінійних координатах в рівнянні Лапласа, форми частинних і загальних розв'язків основних крайових задач для вказаних областей;

постановки основних крайових задач для рівняння Ламе, методи побудови частинних і загальних розв'язків рівняння Ламе в канонічних однозв'язних областях, сутність узагальненого методу Фур'є та можливості його застосування в крайових задачах;

вміти:

користуватися різними типами спеціальних функцій, будувати загальні розв'язки крайових задач для рівняння Лапласа в півпросторі, циліндрі, кулі, сфероїді, застосовувати узагальнений метод Фур'є для розв'язання крайових задач для рівняння Ламе в деяких просторових двозв'язних областях.

Міждисциплінарні зв'язки: базою для засвоєння дисципліни «Крайові задачі механіки деформівного твердого тіла» є такі дисципліни: «Теорія пружності», «Аналіз операторних рівнянь», «Диференціальні рівняння в частинних похідних». Використовується при підготовці кваліфікаційної роботи.

3. Програма навчальної дисципліни

Модуль 1

Змістовий модуль 1. Спеціальні функції

Тема 1. Гамма-функція і бета-функція Ейлера

Означення гамма-функції, область існування в комплексній площині. Функціональне рівняння. Аналітичне продовження. Формула подвоєння аргументу. Функціональні співвідношення між гамма-функціями. Означення бета-функції, її зв'язок з гамма-функціями. Розклад гамма-функції в нескінченний добуток. Логарифмічна похідна гамма-функції, її розклад у функціональні ряди. Формула Вейерштрасса.

Тема 2. Лінійні диференціальні рівняння (ЛДР) другого порядку з аналітичними коефіцієнтами

Звичайні та особливі точки лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з аналітичними коефіцієнтами. Перетворення рівняння до стандартного вигляду. Існування двох лінійно незалежних розв'язків у рівняння з аналітичними коефіцієнтами. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку класу Фукса. Побудова розв'язків за допомогою степеневих рядів.

Тема 3. Циліндричні функції

Рівняння Бесселя. Побудова лінійно незалежних розв'язків. Функції Бесселя і функції Неймана. Розклад у степеневі ряди. Функції Бесселя з півцілим значенням індексу. Інтегральне подання функції Бесселя. Асимптотика функції Бесселя на нескінченності. Ортогональність функцій Бесселя. Модифіковані функції Бесселя, їх властивості.

Тема 4. Гіпергеометричні та сферичні функції

Гіпергеометричне рівняння Гаусса. Побудова лінійно незалежних розв'язків. Гіпергеометричний ряд. Рівняння Лежандра. Функції Лежандра першого та другого роду. Многочлени Лежандра. Приєднані функції Лежандра. Диференціальне рівняння приєднаних функцій. Ортогональність приєднаних функцій Лежандра. Інтегральне подання приєднаних функцій Лежандра першого роду. Асимптотичні формули.

Модульний контроль

Модуль 2

Змістовий модуль 2. Крайові задачі для рівняння Лапласа в деяких просторових канонічних областях

Тема 5. Крайові задачі в циліндричних координатах

Крайова задача для півпростору. Оператор Лапласа в циліндричних координатах. Розділення змінних у рівнянні Лапласа в циліндричних координатах. Задачі Штурма – Ліувілля. Побудова частинних розв'язків. Пряме та обернене інтегральне перетворення Ганкеля. Загальний розв'язок крайової задачі. Крайова задача для нескінченного циліндра. Задачі Штурма – Ліувілля.

Побудова частинних розв'язків. Загальний розв'язок крайової задачі.

Тема 6. Крайові задачі в сферичних і сфероїдальних координатах

Крайові задачі для кулі. Оператор Лапласа в сферичних координатах. Розділення змінних у рівнянні Лапласа в сферичних координатах. Задачі Штурма – Ліувілля. Побудова частинних розв'язків. Загальний розв'язок крайової задачі. Внутрішня задача Неймана для кулі. Розклад фундаментального розв'язку рівняння Лапласа в ряд за многочленами Лежандра. Подання потенціалу простого шару рядом сферичних функцій. Інтеграл Діні. Крайові задачі для витягнутого сфероїда. Оператор Лапласа в сфероїдальних координатах. Розділення змінних у рівнянні Лапласа в сфероїдальних координатах. Задачі Штурма – Ліувілля. Побудова частинних розв'язків. Загальні розв'язки першої внутрішньої та зовнішньої крайових задач.

Змістовий модуль 3. Крайові задачі теорії пружності та термопружності

Тема 7. Задачі теорії пружності та термопружності для деяких однозв'язних та двозв'язних тіл

Осесиметрична задача теорії пружності для простору зі сферичною і сфероїдальною порожнинами. Побудова базисних розв'язків рівняння Ламе в сферичних і сфероїдальних координатах. Апарат узагальненого методу Фур'є. Побудова загального розв'язку задачі. Зведення задачі до розв'язальної системи та її аналіз. Числові результати для деяких типів крайових умов.

Перша і друга крайові задачі для рівняння Ламе для кулі зі сфероїдальною порожниною. Побудова загального розв'язку, зведення до розв'язальної системи, її аналіз. Перша і друга крайові задачі для рівняння Ламе для сфероїда зі сферичною порожниною. Побудова загального розв'язку, зведення до розв'язальної системи, її аналіз.

Задача визначення температурних напружень у просторі з нескінченною системою кульових включень. Постановка задачі. Зведення до шару з кульовим включенням. Апарат узагальненого методу Фур'є для термопружних задач. Зведення задачі до розв'язальної системи та її аналіз. Числові результати.

Мішана задача про скрут пружного простору жорстким штампом у формі сферичного сегмента. Постановка крайової задачі. Умови спряження полів на межі двох областей. Системи парних рівнянь та метод її розв'язання. Розривний інтеграл Мелера. Формула для скрутного моменту. Аналіз числових результатів.

Модульний контроль

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістовних модулів і тем	Кількість годин				
	Усього	У тому числі			
		л	п	лаб.	с. р.
1	2	3	4	5	6
Модуль 1					
Змістовий модуль 1. Спеціальні функції					
Тема 1. Гамма-функція і бета-функція Ейлера	20	4	4		12
Тема 2. ЛДР другого порядку з аналітичними коефіцієнтами	13	3	2		8
Тема 3. Циліндричні функції	22	5	4		13
Тема 4. Гіпергеометричні та сферичні функції	20	4	4		12
Модульний контроль	2		2		
Разом за змістовним модулем 1	77	16	16		45
Модуль 2					
Змістовний модуль 2. Крайові задачі для рівняння Лапласа в деяких просторових канонічних областях					
Тема 5. Крайові задачі для рівняння Лапласа в циліндричних координатах	12	2	2		8
Тема 6. Крайові задачі для рівняння Лапласа в сферичних і сфероїдальних координатах	24	4	4		16
Разом за змістовним модулем 2	36	6	6		24
Змістовий модуль 3. Крайові задачі теорії пружності та термопружності					
Тема 7. Задачі теорії пружності та термопружності для деяких однозв'язних та двозв'язних тіл	50	10	8		32
Модульний контроль	2		2		
Разом за змістовним модулем 3	52	10	10		32
Усього годин	165	32	32		101

5. Теми семінарських занять

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кільк. год.
1	2	3
1-2	Гамма-функція і бета-функція Ейлера	4
3	Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з аналітичними коефіцієнтами.	2
4-5	Циліндричні функції.	4
6-7	Гіпергеометричні та сферичні функції.	4
8	Модульний контроль.	2

9	Крайові задачі для рівняння в циліндричних координатах.	2
10-11	Крайові задачі в сферичних і сфероїдальних координатах.	4
12-15	Задачі теорії пружності та термопружності для деяких однозв'язних та двозв'язних тіл	8
16	Модульний контроль.	2
	Разом	32

7. Теми лабораторних занять

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	2	3
1	Гамма-функція і бета-функція Ейлера (Тема 1)	12
2	ЛДР другого порядку з аналітичними коефіцієнтами (Тема 2)	8
3	Циліндричні функції (Тема 3)	13
4	Гіпергеометричні та сферичні функції (Тема 4)	12
5	Крайові задачі в циліндричних координатах (Тема 5)	8
6	Крайові задачі в сферичних і сфероїдальних координатах (Тема 6)	16
7	Задачі теорії пружності та термопружності для деяких однозв'язних та двозв'язних тіл (Тема 7)	32
	Разом	101

9. Індивідуальні завдання

5. Методи навчання

Проведення аудиторних лекцій, практичних занять, індивідуальні консультації, самостійна робота студентів за матеріалами, опублікованими.

6. Методи контролю

Проведення поточного контролю, письмового модульного контролю, фінального контролю у вигляді семестрового контролю у вигляді іспиту (проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску).

7. Критерії оцінювання та розподіл балів, які отримують студенти

7.1. Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Складові навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
----------------------------	---------------------------------	----------------------------	-------------------------

Змістовний модуль 1			
Робота на лекціях	0...1	8	0...8
Робота на практичних заняттях	0...4	7	0...28
Самостійна робота	0...2	6	0...12
Модульний контроль	0...24	1	0...24
Змістовний модуль 2			
Робота на лекціях	0...1	3	0...3
Робота на практичних заняттях	0...4	3	0...12
Самостійна робота	0...2	3	0...6
Змістовний модуль 3			
Робота на лекціях	0...1	5	0...5
Робота на практичних заняттях	0...4	4	0...16
Самостійна робота	0...2	4	0...8
Модульний контроль	0...24	1	0...24
Разом за семестр(*)			0...146

(*) Якщо кількість модульних балів у студента перевищує 100, то як підсумкову оцінку виставляється 100 балів.

Семестровий контроль (іспит) проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску до іспиту. При складанні семестрового іспиту студент має можливість отримати максимум 100 балів.

Білет для іспиту складається з чотирьох питань (двох теоретичних і двох практичних). За кожне питання студент може одержати максимальну суму балів - 25.

7.2. Якісні критерії оцінювання

Задовільно (60-74). Оцінка ставиться, якщо студент знає означення і основні формули гамма і бета функцій Ейлера, циліндричних і сферичних функцій; розв'язує основні крайові задачі для рівняння Лапласа в канонічних областях, володіє основним і узагальненим методом Фур'є і може застосувати його при розв'язанні крайових задач.

Добре (75-89). Оцінка ставиться, якщо студент, крім зазначеного вище, вільно володіє логіко-понятійним апаратом курсу, може обґрунтувати основні його положення і вміє його застосовувати при розв'язанні крайових задач.

Відмінно (90-100). Оцінка ставиться, якщо студент, має стійкі системні знання з дисципліни, уміє їх обґрунтовувати, узагальнювати та продуктивно їх використовує на творчому рівні. Задачі білету розв'язані та мають пояснення до кожного етапу розв'язання. Студент вільно володіє понятійним апаратом, уміє логічно мислити, аналізувати нестандартні ситуації. Має глибокі знання з спеціальних функцій, теорії крайових задач і методів їх дослідження. Вміє знаходити їх наближені розв'язки, контролювати похибки таких наближень.

7.3 Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру

Протягом семестру студент отримує бали за накопичувальною системою згідно з таблицею наведеною в п. 7.1. Дано деякі пояснення до таблиці.

Робота на лекції – активна форма засвоєння матеріалу курсу: 1 бал ставиться за продумані питання, які студент задає лектору, участь в обговоренні предмета лекції, відповіді на питання, які по ходу лекції задає викладач. Активність студента може заохочуватися додатковими коефіцієнтами, які множаться на 1 бал.

Робота на практичному занятті оцінюється так: 2,5 бали за самостійно розв'язану задачу або 1 бал за розв'язану задачу за допомогою викладача, 1,5 бали за обґрунтовану відповідь на теоретичне питання з доведенням основних положень біля дошки.

Самостійна робота – 2 бал ставиться студенту за виконання домашнього завдання разом з його захистом в поза аудиторний час.

Модульний контроль проводиться два рази на семестр на 8 і 16 тижнях на практичних заняттях. Білет для модульного контролю включає 4 питання (два теоретичних і два практичних). За відповідь на одне питання студент може отримати максимально 6 балів. Критерії оцінювання у відсотковому відношенні відповідають якісним критеріям з п. 7.2.

Шкала оцінювання: бальна і традиційна

Сума балів	Оцінка за традиційною шкалою	
	Іспит, диференційований залік	Залік
90 – 100	Відмінно	Зараховано
75 – 89	Добре	
60 – 74	Задовільно	
0 – 59	Незадовільно	Не зараховано

8. Методичне забезпечення

Підручники, навчальні посібники, які видані в університеті.:

1. Ніколаєв О. Г. Диференціальні рівняння: підручник. В 2 кн. Кн. 1. – Харків: ХАІ, 2019.
2. Ніколаєв О.Г. Диференціальні рівняння: підручник. В 2-х кн.. Кн. 2 – Х.: ХАІ, 2020.
3. Ніколаєв О. Г. Функціональний аналіз: підручник. – Харків: ХАІ, 2021.

Електронний ресурс, на якому розміщено навчально-методичний комплекс дисципліни: [//library.khai.edu](http://library.khai.edu). Комплекс включає в себе такі обов'язкові складові:

- робоча програма дисципліни;

- конспект лекцій, підручники (навчальні посібники), в тому числі в електронному вигляді, які за змістом повністю відповідають робочій програмі дисципліни;
- методичні вказівки та рекомендації для виконання розрахункових та практичних робіт, а також рекомендації для самостійної підготовки;
- тематики індивідуальних завдань;
- приклади розв'язування типових задач чи виконання типових завдань;
- питання для контрольних заходів;

9. Рекомендована література

Базова

1. Ніколаєв О. Г. Диференціальні рівняння: підручник. В 2 кн. Кн. 1. – Харків: ХАІ, 2019. – 232 с.
2. Ніколаєв О.Г. Диференціальні рівняння: підручник. В 2-х кн.. Кн. 2 – Х.: ХАІ, 2020.
3. Ніколаєв О. Г. Функціональний аналіз: підручник. – Харків: ХАІ, 2021.
4. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 334 с.
5. Курпа Л.В., Лінник Г.Б. Рівняння математичної фізики. – Харків.: «Підручник НТУ «ХПІ», 2011.
6. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник. – Львів: Львівська політехніка, 2010.

Допоміжна

1. Duffy D.G. Transform methods for solving partial differential equations. – USA, Florida, Boca Raton: CRC Press LLC, 2004.
2. Gockenbach M.S. Partial Differential Equations. Analytical and Numerical Methods. – USA, Philadelphia: SIAM, 2002.
3. Тихонов А. М., Самарський О.А. Рівняння математичної фізики. – М.: МДУ, 1999. (рос. мовою)
4. Подільчук Ю. М. Тривимірні задачі теорії пружності / Ю. М. Подільчук. – Київ: Наук. думка, 1979. (рос. мовою)
5. Улітко А.Т. Метод власних векторних функцій в просторових задачах теорії пружності. – Київ: Наук. думка, 1979. (рос. мовою)
6. Ніколаєв О. Г. Узагальнений метод Фур'є в просторових задачах теорії пружності: монографія / О. Г. Ніколаєв, В. С. Проценко. – Харків: ХАІ, 2011. (рос. мовою)

15. Інформаційні ресурси

Сайт бібліотеки Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» <https://library.khai.edu>.