

Міністерство освіти і науки України  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

Кафедра вищої математики та системного аналізу (№ 405)

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Гарант освітньої програми

(підпис)



Ніколаєв О.Г.  
(ініціали та прізвище)

« 31 » \_\_\_\_\_ 08 \_\_\_\_\_ 2023 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА ОБОВ'ЯЗКОВОЇ  
НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ**

(назва навчальної дисципліни)

Галузь знань: **12 «Інформаційні технології»**  
(шифр і найменування галузі знань)

Спеціальність: **124 «Системний аналіз»**  
(код та найменування спеціальності)

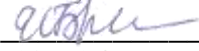
Освітня програма: **«Системний аналіз і управління»**  
(найменування освітньої програми)

**Форма навчання: денна**

**Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)**

**Харків 2023 рік**

Розробник: Брисіна І.В., доцент кафедри вищої математики та  
(прізвище та ініціали, посада, науковий ступінь та вчене звання)  
системного аналізу, к.фіз.-мат.н., доцент

  
(підпис)

Робочу програму розглянуто на засіданні кафедри вищої математики та  
(назва кафедри)  
системного аналізу

Протокол № 6 від « 30.06 » 2023р.

Завідувач кафедри: к.фіз.-мат.н, доцент  
(науковий ступінь та вчене звання)

  
(підпис)

Н.В.Савченко  
(ініціали та прізвище)

## 1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, освітня програма, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни	
		Денна форма навчання	Заочна форма навчання
Кількість кредитів – 4,5 <i>денна</i>	<p style="text-align: center;"><b>Галузь знань</b> 12 «Інформаційні технології» <small>(шифр та найменування)</small></p> <p style="text-align: center;"><b>Спеціальність</b> 124 Системний аналіз  <small>(код та найменування)</small></p> <p style="text-align: center;"><b>Освітня програма</b> «Системний аналіз і управління»  <small>(найменування)</small></p> <p style="text-align: center;"><b>Рівень вищої освіти:</b> перший (бакалаврський)</p>	ОК-12	
Кількість модулів – 2		<b>Навчальний рік</b>	
Кількість змістових модулів – 5		2023/ 2024	
Індивідуальне завдання __ (розрахункова робота) __ Процеси Маркова _____ <small>(назва)</small>		<b>Семестр</b>	
		__5__-й	__-й
Загальна кількість годин – денна – 64		<b>Лекції</b>	
		__32__ години	
Кількість тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 4 самостійної роботи здобувача – 6		<b>Практичні, семінарські</b>	
		__32__	
		<b>Лабораторні</b>	
	<b>Самостійна робота</b>		
	__71__ години		
	<b>Вид контролю</b>		
	іспит		

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить:  
 для денної форми навчання – 64/71;  
 для заочної форми навчання – *кількість годин аудиторних занять/ кількість годин самостійної роботи.*

\* Аудиторне навантаження може бути зменшене або збільшене на одну годину залежно від розкладу занять.

## 2. Мета та завдання навчальної дисципліни

**Мета:** вивчення методів які дозволяють аналітично досліджувати стохастичні моделі; обґрунтування застосування саме ймовірнісних засобів у сучасних розділах науки, техніки, інших галузях знань.

**Завдання:** вивчення методів теорії випадкових процесів, які дають можливість досліджувати найбільш загальні властивості, абстрагуючись від тих, які не мають суттєвого значення.

### Компетентності, які набуваються:

1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу (ЗК -1).
2. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях( ЗК -2).
3. Здатність знати та розуміти предметну область і професійну діяльність (ЗК -4).
4. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел (ЗК -7).
5. Здатність будувати математично-коректні моделі статичних та динамічних процесів і систем із зосередженими та розподіленими параметрами із врахуванням невизначеності зовнішніх та внутрішніх факторів. (ФК -3).
6. Здатність визначати основні чинники, які впливають на розвиток фізичних, економічних, соціальних процесів, відокремлювати в них стохастичні та невизначені показники, формулювати їх у вигляді випадкових або нечітких величин, векторів, процесів та досліджувати залежності між ними (ФК -4).
7. Здатність розробляти експериментальні та спостережувальні дослідження і аналізувати дані,отримані в них (ФК -11).

### Очікувані результати навчання:

1. Знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, векторну та лінійну алгебру, аналітичну геометрію та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу (ПРН - 1).

2. Вміти визначати ймовірнісні розподіли стохастичних показників та факторів, що впливають на характеристики досліджуваних процесів, досліджувати властивості та знаходити характеристики багатовимірних випадкових векторів, використовувати їх для розв'язання прикладних задач, формалізувати стохастичні показники та фактори у вигляді випадкових величин, векторів, процесів (ПРН - 3).

3. Знати та вміти застосовувати основні методи постановки та вирішення задач системного аналізу в умовах невизначеності цілей, зовнішніх умов та конфліктів (ПРН - 6).

**Пререквізити** – алгебра та геометрія, математичний аналіз ,теорія ймовірностей.

**Кореквізити** – функціональний аналіз, актуарна та фінансова математика,стохастичні моделі економічних процесів, логістика та управління запасами.

### 3. Програма навчальної дисципліни

#### Модуль 1

##### Змістовий модуль 1

###### **Тема 1. Вступ до дисципліни «Випадкові процеси».**

Предмет вивчення і задачі дисципліни «Випадкові процеси». Основні історичні етапи розвитку і становлення. Досягнення вітчизняної школи. Сучасний стан розвитку теорії та застосувань.

###### **Тема 2. Основні поняття теорії випадкових процесів**

Означення та приклади випадкових процесів. Класифікація випадкових процесів. Скінченновимірні розподіли. Теорема Колмогорова. Реалізації. Моменти. Кореляційна функція. Властивості числових характеристик. Означення стаціонарних у вузькому та широкому змісті процесів. Приклади. Дійсна та комплексна випадкові гармоніки. Гаусовський процес. Універсальний характер нормального розподілу. Властивості гаусівських систем. Система скінченновимірних розподілів гаусівського процесу. Нормальні процеси із дискретним та неперервним часом.

##### Змістовий модуль 2. Процеси Маркова.

###### **Тема 3. Ланцюг Маркова.**

Випадкове блукання. Матриця ймовірностей переходу ланцюга Маркова за один та за декілька кроків. Властивості. Існування стаціонарного розподілу-ергодична теорема. Інтерпретації стаціонарного розподілу.

**Тема 4. Марківські однорідні процеси зі счисленною множиною станів.** Марківська властивість. Однорідний процес із дискретною множиною станів. Системи прямих та обернених рівнянь Колмогорова-Чепмена для перехідних ймовірностей та ймовірностей перебування у стані. Існування граничного розподілу. Простіший потік випадкових подій, його властивості та застосування. Процеси Маркова в теорії масового обслуговування. Система Ерланга. Ймовірність втрати. Системи із очікуванням. Розподіл часу чекання моменту початку обслуговування. Поняття про оптимальність для систем масового обслуговування.

#### Модуль 2.

##### Змістовий модуль 3. Тема 5. Процеси із незалежними приростами.

Процес Пуассона. Випадковий телеграфний сигнал. Узагальнений телеграфний сигнал. Зв'язок між різними означеннями процесу Пуассона. Суперпозиція процесів Пуассона. Прояснений процес. Процес Крамера - Лундберга. Броунівський рух. Різні означення, властивості та застосування. Загальні процеси із незалежними приростами та їх застосування.

##### Змістовий модуль 4

###### **Тема 6. Лінійні перетворення випадкових процесів.**

Канонічний розклад випадкових процесів та лінійні перетворення процесів, поданих у вигляді канонічного розподілу. Зв'язок із канонічним розкладом кореляційної функції. Неперервність, похідна та інтегрування випадкових процесів відповідно до виду збіжності випадкових величин. Критерії середньоквадратичної збіжності. Змінення числових

характеристик випадкових процесів при лінійних перетвореннях. Приклади застосування — RC-ланцюжок. Випадки зберігання стаціонарності при лінійних перетвореннях. Спектр стаціонарного процесу. Спектральна щільність.

## **Змістовий модуль 5**

### **Тема 7. Мартингали.**

Означення мартингалів із дискретним часом. Симетричне випадкове блукання як приклад мартингала. Приклади. Класична задача про розорення гравця, середня тривалість гри, ймовірність розорення. Задача про розорення інвестора із застосуванням мартингалів. Момент зупинки. Тотожності Вальда. Мартингали із неперервним часом. Застосування мартингалів для дослідження моменту виходу вінерівського процесу за рівень.

#### 4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі										
		л	лаб	п	інд	с.р.						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Модуль 1</b>												
<b>Змістовий модуль 1. Основи теорії випадкових процесів</b>												
Тема 1. Вступ до дисципліни «Випадкові процеси»	9	1	–	–	–	8	–	–	–	–	–	–
Тема 2. Основні поняття теорії Гаусівські процеси.	17	3	4	–	–	10	–	–	–	–	–	–
Разом за змістовним модулем 1	26	4	4	–	–	18	–	–	–	–	–	–
<b>Змістовний модуль 2. Процеси Маркова</b>												
Тема 3. Ланцюги Маркова	14	4	4	–	–	6	–	–	–	–	–	–
Тема 4 Марковські однорідні процеси зі счисленною множиною станів	26	8	8	–	–	10	–	–	–	–	–	–
Разом за змістовним модулем 2	40	12	12	–	–	16	–	–	–	–	–	–
<b>Модуль 2</b>												
<b>Змістовний модуль 3. Процеси із незалежними приростами</b>												
Тема 5. Процеси із незалежними приростами.	27	6	8	–	–	13	–	–	–	–	–	–
Разом за змістовним модулем 3	27	6	8			13						

Змістовий модуль 4 . Лінійні перетворення випадкових процесів												
Тема 6. Лінійні перетворення випадкових процесів. Спектральний розклад.	25	6	4	–	–	15	–	–	–	–	–	–
Разом за змістовим модулем 4	25	6	4	–	–	15	–	–	–	–	–	–

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Змістовий модуль 5. Мартингали</b>												
Тема 7. Мартингали	17	4	4	–	–	9	–	–	–	–	–	–
Разом за змістовим модулем 5	17	4	4	–	–	9	–	–	–	–	–	–
<b>Разом за семестр</b>	<b>135</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	-	-	<b>71</b>	-	-	-	-	-	-

### 5. Теми семінарських занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		Денна форма навчання	Заочна форма навчання
1			
2			
	<b>Разом</b>		

### 6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кільк. год.
1-2	Вступ до теорії. Означення та приклади випадкових процесів. Класифікація випадкових процесів. Скінченновимірні розподіли. Теорема Колмогорова. Реалізації. Моменти. Кореляційна функція. Властивості числових характеристик. Означення стаціонарних у вузькому та широкому змісті процесів. Приклади. Дійсна та комплексна випадкові гармоніки. Гауссовський процес	4
3-4	Ланцюги Маркова. Приклади. Застосування. Ергодичність.	4
5-7	Рівняння Колмогорова-Чепмена. Процеси масового обслуговування. Системи з втратами та системи з очікуванням.	6



8	Модульний контроль	2
9-11	Процес Вінера. Процес Пуассона.	6
12-13	Лінійні перетворення випадкових процесів. Спектральний розклад випадкових процесів.	4
14-15	Мартингали. Задачі про розорення інвестора.	4
16	Модульний контроль	2
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

## 7. Теми лабораторних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		Денна форма навчання	Заочна форма навчання
1			
2			
	<b>Разом</b>		

## 8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Вступ до дисципліни «Випадкові процеси»	8
2	Основні поняття теорії. Гаусівські процеси.	10
3	Ланцюги Маркова	6
4	Марковські однорідні процеси зі скінченною множиною станів	6
5	Процеси із незалежними приростами.	13
6	Лінійні перетворення випадкових процесів. Спектральний розклад.	15
7	Мартингали	9
	Виконання розрахункової роботи «Процеси Маркова»	4
	<b>Разом</b>	<b>71</b>

## 9. Індивідуальні завдання

Процеси Маркова. Розрахунок основних характеристик систем масового обслуговування

## 10. Методи навчання

Проведення аудиторних лекцій, практичних занять, індивідуальні консультації (при необхідності), самостійна робота студентів за матеріалами, опублікованими кафедрою (методичні посібники), проведення олімпіад.

## 11. Методи контролю

Проведення поточного контролю, письмового модульного контролю, фінальний контроль у вигляді іспиту.

## 12. Критерії оцінювання та розподіл балів, які отримують студенти

12.1. Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Складові навчальної роботи за 5 семестр	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
<b>Модуль 1</b>			
Робота на практичних заняттях	0...2	8	0...16
Самостійна робота	0...1	8	0...8
Модульний контроль	0...24	1	0...25
<b>Модуль 2</b>			
Робота на практичних заняттях	0...2	6	0...12
Самостійна робота	0...1	6	0...6
Модульний контроль	0...25	1	0...25
Виконання та захист розрахункової роботи	0...20	1	0...20
<b>Всього за семестр (*)</b>			<b>0...112</b>

(\*) Якщо кількість модульних балів у студента перевищує 100, то в якості підсумкової оцінки виставляється 100 балів.

Семестровий контроль (іспит) проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску до іспиту. При складанні семестрового іспиту студент має можливість отримати максимум 100 балів.

Білет для іспиту складається з двох теоретичних та двох практичних завдань. За кожне теоретичне питання та практичне завдання студент може отримати до 25 балів. Максимальна сума всіх балів – 100.

12.2. Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань для одержання позитивної оцінки:

**знати:**

- Основні означення та теореми теорії випадкових процесів
- Числові характеристики (скінченновимірні розподіли, математичне сподівання, кореляційна функція).
- Поняття стаціонарності.
- Означення процесів Маркова
- Приклади застосування процесів Маркова.
- Властивості ланцюгів Маркова.
- Означення процесів Вінера та Пуассона.

### 12.3 Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру

**Задовільно (60-74).** Показати мінімум знань та умінь. Захистити всі індивідуальні завдання. Знати основні означення (Числові характеристики.

Поняття стаціонарності. Означення процесів Маркова. Властивості ланцюгів Маркова. Означення процесів Вінера та Пуассона) . Відповіді студента розкривають суть питань без достатньої повноти і обґрунтування, або у відповідях є неправильне тлумачення окремих понять та неточність у формулюванні відповідних термінів.

**Добре (75-89).** Твердо знати матеріал, захистити всі індивідуальні завдання. Знати основні класи випадкових процесів. Приклади їх застосування. Скінченновимірні розподіли, математичне сподівання, кореляційна функція. Процеси Маркова, класифікація Кендалла. Ергодична теорема для ланцюгів. Процеси із незалежними приростами. Означення мартингалів. Означення лінійних перетворень та спектрального розкладу. У відповідях студента можуть допускатися окремі помилки непринципового характеру, які не впливають на розкриття суті теоретичних питань. Завдання в цілому виконуються без помилок, але в обґрунтуванні розв'язання є певні недоліки.

**Відмінно (90-100).** Здати всі контрольні точки з оцінкою «відмінно». Досконально знати всі теми та уміти застосовувати їх. Зокрема не лише знати зміст теорем, але й вміти доводити їх. Курсову роботу не передбачено навчальним планом.

#### Шкала оцінювання: бальна і традиційна

Сума балів	Оцінка за традиційною шкалою	
	Іспит, диференційований залік	Залік
90 – 100	Відмінно	Зараховано
75 – 89	Добре	
60 – 74	Задовільно	
0 – 59	Незадовільно	Не зараховано

Протягом семестру студент отримує бали за накопичувальною системою згідно з таблицею наведеною в п. 12.1. Дано деякі пояснення до таблиці.

Робота на лекції – активна форма засвоєння матеріалу курсу: 0,5 бала ставиться за продумані питання, які студент задає лектору, участь в обговоренні предмета лекції, відповіді на питання, які по ходу лекції задає викладач. Активність студента може заохочуватися додатковими коефіцієнтами, які множаться на 0,5 бала.

Робота на практичному занятті оцінюється так: 2 бали за самостійно розв'язану задачу або за обґрунтовану відповідь на теоретичне питання з доведенням основних положень; 1 бал за розв'язану задачу за допомогою викладача.

Самостійна робота – 1 бал ставиться студенту за виконання домашнього завдання разом з його захистом.

Індивідуальне завдання включає виконання та захист розрахункової роботи за темами, зазначеними в назві роботи.

Модульний контроль проводиться на 8 і 16 тижнях на практичних заняттях.

**Електронний ресурс, на якому розміщено навчально-методичний комплекс дисципліни:** <http://library.khai.edu/library/fulltexts/doc/>

**Комплекс НМЗД включає в себе такі обов'язкові складові:**

- робоча програма дисципліни;
- конспект лекцій, підручники (навчальні посібники), в тому числі в електронному вигляді, які за змістом повністю відповідають робочій програмі дисципліни;
- методичні вказівки та рекомендації для виконання розрахункових та практичних робіт, а також рекомендації для самостійної підготовки;
- тематики індивідуальних завдань;
- приклади розв'язування типових задач чи виконання типових завдань;
- питання для контрольних заходів;
- каталоги інформаційних ресурсів.

### **13. Методичне забезпечення**

**Робочі зошити та підручники:**

1. Брисіна І.В., Макарічев В.О. Випадкові процеси. Харків, ХАІ, 2009.
2. Брисіна І.В., Рвачова Т.В., Томілова Є.П., Макарічев В.О. Методи системного аналізу у фінансовій і актуарній математиці. Харків, ХАІ, 2017. Російською мовою. Електронний ресурс.
3. Брисіна І.В., Рвачова Т.В., Томілова Є.П., Макарічев В.О. Фінансова и актуарна математика: навчальний посібник по практичним заняттям. ХАІ, 2017. Російською мовою. Електронний ресурс.
4. Ніколаєв О.Г. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. - Харків, "Основа", 2000.
5. І. В. Брисіна, О. В. Головченко, Г. І. Кошовий, О. Г. Ніколаєв та ін. Практичний курс вищої математики в чотирьох книгах: Навч. посібник для ВУЗів. – Харків: Нац. аерокос. ун-т „Харк. авіац. ін-т”, 2004.
6. Навчально-методичне забезпечення дисципліни "Випадкові процеси" для бакалаврів / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського "Харків. авіац. ін-т"; І.В.Брисіна. - Харків, 2019. - 51 с. - <http://library.khai.edu/library/fulltexts/doc>

### **14. Рекомендована література**

1. Горбань І.Т. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів. НАНУ, Інститут проблем математичних машин і систем, К., 2003 – с. 244.
2. Коломієць С.В. Теорія випадкових процесів: практикум. – Суми: ДВНЗ «УБС НБУ», 2011. – 80 с.
3. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів, К. Либідь, 1990, с. 167.
4. Steve Lally, Stochastic processes lecture notes, Galton. Uchicago.edu., 2016.

### **Інформаційні ресурси (додатково)**

<https://nptel.ac.in/courses/110104024/pdf/lecture5.pdf>

[https://web.ma.utexas.edu/users/gordanz/notes/introduction to stochastic processes.pdf](https://web.ma.utexas.edu/users/gordanz/notes/introduction%20to%20stochastic%20processes.pdf)

<https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-262-discrete-stochastic-processes-spring-2011/video-lectures/lecture-20-markov-processes-and-random-walks/>