

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Кафедра «Вищої математики та системного аналізу» (№ 405)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Голова НМК № 2


(підпис)

М. С. Зряхов
(ініціали та прізвище)

« 30 » 08 2019 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА ОБОВ'ЯЗКОВОЇ
НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

Функціональний аналіз

(назва навчальної дисципліни)

Галузь знань: 11 «Математика та статистика», 12 «Інформаційні технології»

(шифр і найменування галузі знань)

Спеціальність: 113 «Прикладна математика», 124 «Системний аналіз»

(код та найменування спеціальності)

Освітня програма: Обчислювальний інтелект. Математичне та комп'ютерне

(найменування освітньої програми)

моделювання. Системний аналіз і управління.

Форма навчання: денна

Рівень вищої освіти перший(бакалаврський)

Харків 2019 рік

Робоча програма _____ «Функціональний аналіз»
(назва дисципліни)

для студентів спеціальностей: 113 «Прикладна математика», 124 «Системний аналіз» та освітніх програм: обчислювальний інтелект, математичне та комп'ютерне моделювання, системний аналіз і управління.

«29» серпня 2019 р., 12 с.

Розробник: Ніколаєв О.Г. завідувач кафедри вищої математики та системного аналізу, д.ф.-м.н., професор
(прізвище та ініціали, посада, науковий ступінь та вчене звання)


(підпис)

Робочу програму розглянуто на засіданні кафедри вищої математики та системного аналізу

(назва кафедри)

Протокол № 1 від « 29 » серпня 2019 р.

Завідувач кафедри: д.фіз.-мат.н., професор
(науковий ступінь та вчене звання)


(підпис)

О.Г.Ніколаєв
(ініціали та прізвище)

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, освітня програма, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни (денна форма навчання)
Кількість кредитів – 5	Галузі знань <u>11 «Математика та статистика»</u> (шифр та найменування) <u>12 «Інформаційні технології»</u> Спеціальності <u>113 «Прикладна математика»,</u> (код та найменування) <u>124 «Системний аналіз»</u> Освітні програми <u>Обчислювальний інтелект. Математичне та комп’ютерне</u> (найменування) <u>моделювання. Системний аналіз і управління.</u> Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)	Цикл загальної підготовки
Кількість модулів – 2		Навчальний рік
Кількість змістовних модулів – 3		2019/2020
Індивідуальне завдання _____ (назва)		Семестр
Загальна кількість годин – 72/150		5-й
		Лекції ¹⁾
Кількість тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 5 годин (перша половина семестру), 4 години (друга половина семестру) самостійної роботи студента – 5 годин		40 годин
		Практичні, семінарські ¹⁾
		32 години
		Лабораторні ¹⁾
	_____ годин	
	Самостійна робота	
	78 годин	
	Вид контролю	
	модульний контроль, іспит	

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить: 72/78

¹⁾ Аудиторне навантаження може бути зменшене або збільшене на одну годину в залежності від розкладу занять.

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета вивчення: засвоєння основних положень функціонального аналізу та їх застосування до обчислювальної математики, диференціальних та інтегральних рівнянь.

Завдання: відпрацювання основних понять, теорем, методів та алгоритмів дисципліни, а саме: властивості метричних, банахових та гільбертових просторів; топологічні поняття метричних просторів; основні принципи функціонального аналізу; загальні поняття теорії лінійних функціоналів і лінійних операторів в нормованих і гільбертових просторах; умови розв'язності операторних рівнянь з обмеженим та компактним операторами.

Міждисциплінарні зв'язки: базою для засвоєння функціонального аналізу є такі дисципліни: «Математичний аналіз», «Алгебра та геометрія». Використовується як сучасна математична мова в усіх математичних дисциплінах, зокрема в таких: «Диференціальні рівняння», «Рівняння математичної фізики», «Варіаційні методи», «Методи оптимізації», «Моделювання складних систем», «Теорії керування», «Обчислювані методи системного аналізу», «Елементи нелінійного аналізу».

Результати навчання: студент повинен **знати:**

- означення та властивості метричних, банахових і гільбертових просторів;
- топологічні поняття метричних просторів;
- основні принципи функціонального аналізу;
- загальні поняття теорії лінійних функціоналів і лінійних операторів в нормованих і гільбертових просторах;
- умови розв'язності операторних рівнянь з обмеженим та компактним операторами;

повинен вміти:

- знаходити границі послідовностей елементів в метричних, банахових та гільбертових просторах;
- перевіряти відкритість та замкненість множин в метричному просторі, а також сепарабельність просторів;
- досліджувати простори на повноту;
- знаходити елементи найкращого наближення до підпростору;
- ортогоналізувати системи елементів в гільбертовому просторі, розкладувати елемент за ортонормованою системою в узагальнений ряд Фур'є;
- перевіряти компактність множин в нормованих просторах;
- перевіряти лінійність, обмеженість, компактність операторів;
- знаходити норми лінійних функціоналів і операторів, границі послідовностей операторів;
- знаходити спряжений оператор до даного, обернений оператор до даного;

- досліджувати розв'язність лінійних операторних рівнянь та будувати їх наближені розв'язки.

мати навички:

- роботи в нескінченновимірних просторах;
- аналізу операторних рівнянь.

3. Програма навчальної дисципліни

Модуль 1.

Змістовий модуль 1. Метричні, нормовані та евклідові простори

Тема 1. Простори

Нерівності Гьольдера та Мінковського. Метрика. Означення метричного простору. Приклади метричних просторів. Нормований простір. Приклади. Скалярний добуток. Евклідів простір. Евклідова норма. Властивості скалярного добутку та норми. Приклади.

Тема 2. Збіжність

Границя послідовності елементів в метричному просторі. Зміст збіжності в конкретних метричних просторах. Властивості границі в метричному, нормованому, евклідовому просторах. Еквівалентність норм в нормованому просторі.

Тема 3. Топологія

Відкрита та замкнена кулі в метричному просторі, окіл точки. Обмежена множина. Внутрішня, зовнішня та гранична точки множини. Відкрита та замкнена множини в метричному просторі. Операція замкнення, її властивості. Властивості відкритих та замкнених множин. Поняття топологічного простору. Всюди щільна та ніде не щільна множини. Канторова множина. Сепарабельний простір. Приклад несепарабельного простору.

Тема 4. Повнота

Фундаментальна послідовність, її властивості. Повні метричні простори. Банахові та гільбертові простори. Повнота конкретних просторів. Принцип вкладених куль. Ряди в бананових просторах.

Тема 5. Підпростори

Підпростори нормованого простору. Приклади. Відстань елемента від підпростору. Елемент найкращого наближення. Теорема про елемент найкращого наближення до підпростору гільбертова простору. Теорема Ріса про «майже перпендикуляр». Ортогональне доповнення до лінійного многовида. Базис в нормованому просторі. Ортонормовані системи в гільбертовому просторі. Процес ортогоналізації. Многочлени Лежандра. Ряди Фур'є в гільбертовому просторі. Екстремальна властивість відрізка ряду Фур'є. Повні ортонормовані системи. Рівність Парсеваля. Критерії повноти ортонормованої системи в гільбертовому просторі.

Тема 6. Компактність

Компактні множини в метричних просторах. Приклади. Властивості компактних множин. Екстремальні властивості неперервних функцій на компактах. Критерій компактності Хаусдорфа та його наслідки. Критерій

компактності в просторі неперервних функцій. Приклади. Локальна компактність в нормованому просторі.

Модульний контроль

Модуль 2

Змістовий модуль 2. Лінійні функціонали і оператори в банахових і гільбертових просторах

Тема 7. Лінійні функціонали. Спряжені простори

Означення лінійного функціоналу, його властивості. Неперервність та обмеженість лінійного функціонала, його норма. Спряжений простір. Загальний вигляд функціоналів в деяких нормованих просторах. Теорема Ріса про загальний вид функціонала в гільбертовому просторі. Узагальнений розв'язок крайової задачі. Ортогональне доповнення до множини в нормованому просторі. Теорема Хана – Банаха та її наслідки. Геометричне тлумачення.

Тема 8. Лінійні оператори в банахових та гільбертових просторах

Означення лінійного оператора в нормованому просторі. Приклади. Обмеженість та неперервність лінійного оператора. Норма оператора. Приклади. Простір лінійних обмежених операторів та типи збіжності в ньому. Алгебра операторів. Ядро та образ оператора. Означення оберненого оператора. Критерій обмеженої оберненості лінійного оператора. Умови існування оператора $(I - A)^{-1}$. Теорема Банаха про обернений оператор. Спряжений оператор до обмеженого. Норма спряженого оператора. Лінійні цілком неперервні оператори, їх властивості. Приклади. Спряжений оператор до цілком неперервного оператора. Спектр лінійного обмеженого оператора. Резольвентна множина, її властивості. Типи спектра, Приклади. Спектр цілком неперервного оператора, його властивості.

Змістовий модуль 3. Лінійні операторні рівняння

Тема 9. Лінійні операторні рівняння

Рівняння зі стискаючим оператором. Теорема Банаха. Застосування до аналізу і побудови наближених розв'язків НСЛАР та інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Рівняння з компактним оператором. Теореми Фредгольма. Оцінка похибки наближеного розв'язку. Рівняння з додатно визначеним оператором. Наближені методи розв'язання операторних рівнянь.

Модульний контроль

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістовних модулів і тем	Кількість годин				
	Усього	У тому числі			
		л	п	лаб.	с. р.
1	2	3	4	5	6
Модуль 1					
Змістовний модуль 1. Метричні, нормовані та евклідові простори					
Тема 1. . Простори	15	4	3		8
Тема 2. Збіжність	8	2	2		4
Тема 3. Топологія	8	2	2		4
Тема 4. Повнота	8	2	2		4
Тема 5. Підпростори	12	3	3		6
Тема 6. Компактність	11	3	2		6
Модульний контроль	2		2		
Разом за змістовним модулем 1	64	16	16		32
Модуль 2					
Змістовний модуль 2. Лінійні функціонали і оператори в банахових і гільбертових просторах					
Тема 1. Лінійні функціонали. Спряжені простори	28	8	4		16
Тема 2. Лінійні оператори в банахових і гільбертових просторах	30	8	6		16
Разом за змістовним модулем 2	58	16	10		32
Змістовний модуль 3					
Тема 1. Лінійні операторні рівняння	26	8	4	-	14
Модульний контроль	2		2		
Разом за змістовним модулем 3	28	8	6		14
Усього годин	150	40	32		78

5. Теми семінарських занять

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Метричні та нормовані простори. Перевірка аксіом відстані та норми	2
2	Евклідові простори. Перевірка аксіом скалярного добутку	1
2-3	Границя послідовності в метричному та нормованому просторах.	2
3-4	Відкриті та замкнені множини в метричному просторі.	2
4-5	Повнота метричного простору.	2

5	Півпростори. Відстань елемента від підпростору.	1
6	Ортонормовані системи. Процес ортогоналізації. Ряди Фур'є в гільбертовому просторі.	2
7	Компактність.	2
8	Модульний контроль	2
9	Лінійні функціонали. Обмеженість. Норма функціонала.	2
10	Теорема Хана – Банаха	2
11	Лінійні оператори. Обмеженість. Норма оператора.	2
12	Ядро та образ оператора. Обернений оператор.	2
13	Спряжений оператор. Компактний оператор	2
14	Операторні рівняння зі стискаючим оператором	2
15	Компактні оператори в гільбертовому просторі. Наближені розв'язки операторних рівнянь.	2
16	Модульний контроль	2
	Разом	30

7. Теми лабораторних занять

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	2	3
1	Метрика. Означення метричного простору. Нормований простір. Скалярний добуток. Евклідов простір. Евклідова норма. Властивості скалярного добутку та норми. Ізометрія метричних просторів. [1; К[1]; Л[1]; Т[1; 2]] (Тема 1)	8
2	Границя послідовності елементів в метричному просторі. Властивості границі в метричному, нормованому, евклідовому просторах. Еквівалентність норм в нормованому просторі [1; К[1]; Л[1]; Т[1; 2]] (Тема 2)	4
3	Відкрита та замкнена кулі в метричному просторі, окіл точки. Обмежена множина. Внутрішня, зовнішня та гранична точки множини. Відкрита та замкнена множини в метричному просторі. Операція замкнення, її властивості. Властивості відкритих та замкнених множин. Всюди щільна та ніде не щільна множини. Канторова множина. Сепарабельний простір. [1; К[1]; Л[1]; Т[1; 2]] (Тема 3)	4
4	Фундаментальна послідовність, її властивості. Повні метричні простори. Повнота конкретних просторів. Принцип вкладених куль. Ряди в бананових просторах. [1; К[1]; Л[1]; Т[1; 2]] (Тема 4)	4
5	Підпростори нормованого простору. Відстань елемента від	6

	підпростору. Елемент найкращого наближення. Теорема про елемент найкращого наближення до підпростору гільбертова простору. Ортогональне доповнення до лінійного багатовода. Базис в нормованому просторі. Ортонормовані системи в гільбертовому просторі. Процес ортогоналізації. Багаточлени Лежандра. Ряди Фур'є в гільбертовому просторі. Екстремальна властивість відрізка ряду Фур'є. Повні ортонормовані системи. Рівність Парсеваля. [1; К[1]; Л[1]; Т[1; 2]] (Тема 5)	
6	Компактні множини в метричних просторах. Властивості компактних множин. Екстремальні властивості неперервних функцій на компактах. Критерій компактності Хаусдорфа та його наслідки. Критерій компактності в просторі неперервних функцій. Локальна компактність в нормованому просторі. [1; К[1]; Л[1]; Т[1; 2]] (Тема 6)	6
7	Означення лінійного функціоналу, його властивості. Неперервність та обмеженість лінійного функціонала, його норма. Спряжений простір. Загальний вигляд функціоналів в деяких нормованих просторах. Теорема Рісса про загальний вид функціонала в гільбертовому просторі. Узагальнений розв'язок крайової задачі. Теорема Хана – Банаха та її наслідки. [1; К[1]; Л[1]; Т[1; 2]] (Тема 1)	16
8	Означення лінійного оператора в нормованому просторі. Обмеженість та неперервність лінійного оператора. Норма оператора. Простір лінійних обмежених операторів та типи збіжності в ньому. Алгебра операторів. Ядро та образ оператора. Означення оберненого оператора. Критерій обмеженої оберненості лінійного оператора. Умови існування оператора $(I - A)^{-1}$. Теорема Банаха про обернений оператор. Спряжений оператор до обмеженого. Норма спряженого оператора. Лінійні цілком неперервні оператори, їх властивості. Спряжений оператор до цілком неперервного оператора. Спектр лінійного обмеженого оператора. Резольвентна множина, її властивості. Типи спектра, Приклади. Спектр цілком неперервного оператора, його властивості. [1; К[1]; Л[1]; Т[1; 2]] (Тема 2)	16
9	Рівняння зі стискаючим оператором. Теорема Банаха. Побудова наближених розв'язків НСЛАР та інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Рівняння з компактним оператором. Теореми Фредгольма. Оцінка похибки наближеного розв'язку. Рівняння з додатно визначеним оператором. Наближені методи розв'язання операторних рівнянь. [1; К[1]; Л[1]; Т[1; 2]] (Тема1)	14
	Разом	78

9. Індивідуальні завдання

№ з/п	Назва теми
1	Виконання розрахункової роботи «Метричні, нормовані, евклідові простори. Лінійні функціонали і оператори. Наближений розв'язок операторних рівнянь»

10. Методи навчання

Проведення аудиторних лекцій, практичних занять, індивідуальні консультації, самостійна робота студентів за матеріалами, опублікованими кафедрою

11. Методи контролю

Проведення поточного контролю, письмового модульного контролю, фінальний контроль у вигляді іспиту.

12. Критерії оцінювання та розподіл балів, які отримують студенти

12.1. Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Складові навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
Змістовний модуль 1			
Робота на лекціях	0...0,5	8	0...4
Робота на практичних заняттях	0...2,5	7	0...17,5
Самостійна робота	0...1	7	0...7
Модульний контроль	0...24	1	0...24
Змістовний модуль 2			
Робота на лекціях	0...0,5	8	0...4
Робота на практичних заняттях	0...2,5	5	0...12,5
Самостійна робота	0...1	5	0...5
Змістовний модуль 3			
Робота на лекціях	0...0,5	4	0...2
Робота на практичних заняттях	0...2,5	2	0...5
Самостійна робота	0...1	2	0...2
Модульний контроль	0...24	1	0...24
Виконання та захист розрахункової роботи	0...10	1	0...10
Всього за семестр(*)			0...117

(*) Якщо кількість модульних балів у студента перевищує 100, то в якості підсумкової оцінки виставляється 100 балів.

Семестровий контроль (іспит) проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску до іспиту. При складанні семестрового іспиту студент має можливість отримати максимум 100 балів.

Білет для іспиту/заліку складається з чотирьох питань (двох теоретичних і двох практичних). За кожне питання студент може одержати максимальну суму балів - 25.

12.2. Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань для одержання позитивної оцінки:

Задовільно (60-74). Оцінка ставиться, якщо студент знає загальні поняття метричних, банахових і гільбертових просторів, може навести їх приклади; знає означення і властивості відкритих і замкнених множин метричного простору; знає означення лінійних і обмежених функціоналів і операторів, знає критерій оберненості лінійного обмеженого оператора; вміє перевіряти аксіоми метрики, норми і скалярного добутку, перевіряти лінійність і обмеженість функціоналів і операторів, вміє розкладати елемент гільбертового простору за ортонормованою системою в узагальнений ряд Фур'є.

Добре (75-89). Оцінка ставиться, якщо студент, крім зазначеного вище, вільно володіє логіко-понятійним апаратом курсу, може обґрунтувати основні його положення (теореми Хана-Банаха, Ріса, Хаусдорфа, Банаха, Фредгольма), вміє знаходити норми лінійних обмежених функціоналів і операторів, досліджувати операторні рівняння на розв'язність.

Відмінно (90-100). Оцінка ставиться, якщо студент, має стійкі системні знання з дисципліни, уміє їх обґрунтовувати, узагальнювати та продуктивно їх використовує на творчому рівні. Задачі білету розв'язані та мають пояснення до кожного етапу розв'язання. Студент вільно володіє понятійним апаратом, уміє логічно мислити, аналізувати нестандартні ситуації. Має глибокі знання з теорії операторних рівнянь на основі властивостей лінійних операторів і векторних просторів, в яких вони діють. Вміє аналізувати операторні рівняння, знаходити їх наближені розв'язки, контролювати похибки таких наближень.

12.3 Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру

Протягом семестру студент отримує бали за накопичувальною системою згідно з таблицею наведеною в п. 12.1. Дано деякі пояснення до таблиці.

Робота на лекції – активна форма засвоєння матеріалу курсу: 0,5 бала ставиться за продумані питання, які студент задає лектору, участь в обговоренні предмета лекції, відповіді на питання, які по ходу лекції задає викладач. Активність студента може заохочуватися додатковими коефіцієнтами, які множаться на 0,5 бала.

Робота на практичному занятті оцінюється так: 1,5 бала за захист виконаного домашнього завдання, 2 бали за самостійно розв'язану задачу або 1 бал за розв'язану задачу за допомогою викладача, 2 бали за обґрунтовану відповідь на теоретичне питання з доведенням основних положень біля дошки.

Самостійна робота – 1 бал ставиться студенту за виконання домашнього завдання разом з його захистом в поза аудиторний час.

Індивідуальне завдання включає виконання та захист розрахункової роботи, яка складається з 5 задач за темами, означеними в назві роботи. За кожну задачу можна одержати максимально 2 бали.

Модульний контроль проводиться два рази на семестр на 8 і 16 тижнях на практичних заняттях. Білет для модульного контролю включає 4 питання (два теоретичних і два практичних). За відповідь на одне питання студент може отримати максимально 6 балів. Критерії оцінювання у відсотковому відношенні відповідають якісним критеріям з п. 12.2.

Шкала оцінювання: бальна і традиційна

Сума балів	Оцінка за традиційною шкалою	
	Іспит, диференційований залік	Залік
90 – 100	Відмінно	Зараховано
75 – 89	Добре	
60 – 74	Задовільно	
0 – 59	Незадовільно	Не зараховано

13. Методичне забезпечення

Конспекти лекцій та підручники:

Ніколаєв О.Г., Рвачова Т.В., Соловйов О.И. Функціональний аналіз. Навчальний посібник. – Х.: ХАІ, 2008.

14. Рекомендована література

Базова

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – К. Выща школа, 1990.
2. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютер. техн., 2009.
3. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу. Часть I. – М.: Изд-во ЦПИ, 2009.
4. Городецкий В.В., Нагибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. – К.: Выща школа, 1990.
5. Дерр В.Я. Функциональный анализ: лекции и упражнения. – М.: КНОРУС, 2013.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: ВШ, 1982.
8. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
9. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984.
10. Федоров В.М. Курс функционального анализа. – М.: Лань, 2005.
11. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.

Допоміжна

1. Садовничий В.А. Теория операторов. – М.: Дрофа, 2004.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988.
3. Хатсон В., Пим Дж.С. Приложение функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983.
4. Saxe K. Beginning Functional Analysis. – New York: Springer-Verlag, 2002.
5. Rynne B.P., Youngson M.A. Linear functional analysis. – London: Springer-Verlag, 2008

15. Інформаційні ресурси

1. Сайт кафедри k405@d4.khai.edu